$x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく．必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = 0$ であること，および，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい．

(1) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)(x \geqq 2)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け．ただし，(2) の α を用いてよい．グラフの凹凸は調べなくてよい．

(4) $2 \leqq m < n$ を満たす整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする．このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

(24 東北大 理系 5)

【答】

(1) $g(x) = 2x - (2x-3)\log(2x-3)$

(2) 略

(3) 略

(4) $(m,\ n) = (3,\ 6)$

【解答】

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x} \quad (x \geqq 2)$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{2}{2x-3}\cdot x - \log(2x-3)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)} \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{g(x) = 2x - (2x-3)\log(2x-3)} \quad (x \geqq 2) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $x > 2$ のとき

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 - \left\{2\cdot\log(2x-3) + (2x-3)\cdot\frac{2}{2x-3}\right\} \\ &= -2\log(2x-3) \\ &< 0 \quad (\because\ x > 2) \end{aligned}$$

よって，$g(x)$ は単調に減少する連続関数で

$$g(2) = 4,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty}(2x-3)\left\{\frac{2x}{2x-3}-\log(2x-3)\right\}\\ &= \lim_{x\to\infty}(2x-3)\left\{1+\frac{3}{2x-3}-\log(2x-3)\right\}\\ &= \infty\cdot(-\infty)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

であるから，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α はただ 1 つ存在する．　……(証明終わり)

(3) (1)，(2) より $x \geqq 2$ での $f(x)$ の増減は右表となる．

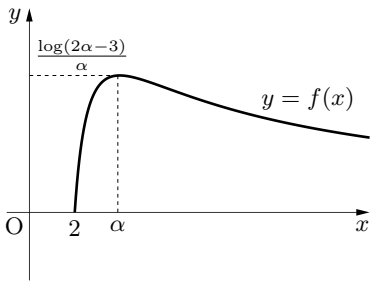
x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

また，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3}\\ &= 2\cdot 0 \quad \left(\because \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

となる．

よって，$y=f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形は右図となる．



(4)　$(*)\quad (2m-3)^n=(2n-3)^m$

$2 \leqq m < n$ のとき，$2m-3>0$，$2n-3>0$ であり，辺々の対数をとることができる．

$$\begin{aligned}(*) &\iff n\log(2m-3)=m\log(2n-3)\\ &\iff \frac{\log(2m-3)}{m}=\frac{\log(2n-3)}{n}\\ &\iff f(m)=f(n) \qquad \cdots\cdots (*)'\end{aligned}$$

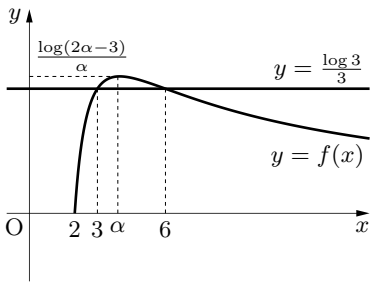
(3) のグラフより，$(*)'$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ $(2 \leqq m < n)$ は $2 \leqq m < \alpha < n$ を満たす．

$$f(3)=\frac{\log 3}{3},$$
$$f(4)=\frac{\log 5}{4},$$
$$f(5)=\frac{\log 7}{5},$$
$$f(6)=\frac{\log 9}{6}=\frac{\log 3^2}{6}=\frac{\log 3}{3}$$

であり

$$f(3)=f(6),$$
$$f(4) \neq f(5)$$

が成り立つ．



図より $n>6$ のとき $m<3$ となるが，$(*)'$ を満たす整数 m は存在しない．

よって，求める組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(3,\ 6)}$$ ……(答)

のみである．