実数の定数 c $(c>0)$ と正の整数 n に対して，

$$a_n=\frac{c}{n!}\int_1^e(\log x)^n\,dx$$

とするとき，以下の問いに答えなさい．ただし，e は自然対数の底である．

(1) a_1 の値を求めなさい．

(2) 2 以上の n に対して，次の等式が成り立つことを証明しなさい．

$$a_{n-1}+a_n=\frac{ce}{n!}$$

(3) 実数 x が，$1\leqq x\leqq e$ のとき，$\log 1\leqq\log x\leqq\log e$ となることを利用して，次の不等式が成り立つことを証明しなさい．

$$0\leqq a_n\leqq\frac{c(e-1)}{n!}$$

(4) 次の S_n を a_n を用いて表し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めなさい．

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

(24 岩手県大 中期 ソフト情 4)

【答】

(1) c

(2) 略

(3) 略

(4) $S_n=\dfrac{(-1)^n a_n}{ce}+\dfrac{1}{e}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{e}$

【解答】

$$a_n=\frac{c}{n!}\int_1^e(\log x)^n\,dx\quad(c>0)\qquad\cdots\cdots ①$$

(1) ① において $n=1$ とすると

$$\begin{aligned}a_1&=c\int_1^e\log x\,dx\\&=c\left(\Big[x\cdot\log x\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)\\&=c\left(e-\Big[x\Big]_1^e\right)\\&=c\{e-(e-1)\}\\&=\boldsymbol{c}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $n\geqq 2$ のとき，部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{c}{n!}\left\{\Big[x\cdot(\log x)^n\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}\\&=\frac{c}{n!}\left\{e-n\int_1^e(\log x)^{n-1}\,dx\right\}\\&=\frac{ce}{n!}-a_{n-1}\end{aligned}$$

よって

$$a_{n-1}+a_n=\frac{ce}{n!}$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) 実数 x が，$1 \leqq x \leqq e$ のとき，$\log 1 \leqq \log x \leqq \log e$ となるから

$$(\log 1)^n \leqq (\log x)^n \leqq (\log e)^n$$

$$\frac{c}{n!}\int_1^e 0^n\,dx \leqq \frac{c}{n!}\int_1^e (\log x)^n\,dx \leqq \frac{c}{n!}\int_1^e 1^n\,dx$$

$$\therefore\quad 0 \leqq a_n \leqq \frac{c(e-1)}{n!}$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(4) (2) の等式を用いると

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(a_{k-1}+a_k)}{ce} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k a_k - (-1)^{k-1}a_{k-1}}{ce} \\
&= \frac{(-1)^n a_n + a_1}{ce} \\
&= \boldsymbol{\frac{(-1)^n a_n}{ce} + \frac{1}{e}} \quad (\because\ (1))
\end{aligned}$$

……(答)

が成り立つ．さらに (3) の不等式を用いると

$$0 \leqq \left|\frac{(-1)^n a_n}{ce}\right| = \frac{a_n}{ce} \leqq \frac{1}{ce}\cdot\frac{c(e-1)}{n!} = \frac{e-1}{en!} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

ハサミウチの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n a_n}{ce} = 0$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

……(答)

である．