$I = \displaystyle\int_1^0 x^2(1-x)^7\,dx$ を求めなさい．

(24 公立千歳科技大 中期 理工 1(4))

【答】 $-\dfrac{1}{360}$

【解答】

$$I = \int_1^0 x^2(1-x)^7\,dx$$

$t = 1 - x$ とおくと

$$dt = -dx \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \longrightarrow & 0 \\ \hline t & 0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-t)^2 t^7 \cdot (-1)\,dt \qquad \cdots\cdots ① \\ &= -\int_0^1 (t^7 - 2t^8 + t^9)\,dt \\ &= -\left[\frac{t^8}{8} - 2\cdot\frac{t^9}{9} + \frac{t^{10}}{10}\right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \frac{1}{10}\right) \\ &= -\frac{45-80+36}{2^3\cdot 3^2\cdot 5} \\ &= -\frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot 5} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{360}} \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$(答)

である．

- ① 以降は部分積分法を用いてもよい (最初から部分積分法を用いることもできる)．

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^1 (1-t)^2 t^7\,dt \\ &= -\left[(1-t)^2\cdot\frac{t^8}{8}\right]_0^1 + \int_0^1 2(1-t)(-1)\cdot\frac{t^8}{8}\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)t^8\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\left[(1-t)\cdot\frac{t^9}{9}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 (-1)\cdot\frac{t^9}{9}\,dt \\ &= -\frac{1}{36}\left[\frac{t^{10}}{10}\right]_0^1 \\ &- \frac{1}{360} \end{aligned}$$

である．