自然対数の底 $e$ に対し，$F_n(x)=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_{n-r}x^r$ とする．1 以上の整数 $n$ に対し，正の実数 $\beta>\alpha>0$ について

$$\int_{\alpha}^{\beta}x^ne^{-x}\,dx=F_n(\alpha)-F_n(\beta)\qquad\cdots\cdots ①$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明しなさい．

(24 公立千歳科技大 中期 理工 2)

---

【答】 略

---

【解答】

$I_n=\int_{\alpha}^{\beta}x^ne^{-x}\,dx$，$F_n(x)=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_{n-r}x^r$ とおく．$F_n(\alpha)-F_n(\beta)=\Big[F_n(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}$ であるから

「1 以上の整数 $n$ に対し $I_n=\Big[F_n(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}$ $\cdots\cdots$ ①$'$ が成り立つ」

ことを数学的帰納法により示せばよい．

(i) $n=1$ のとき

$$I_1=\int_{\alpha}^{\beta}xe^{-x}\,dx=\Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

一方

$$F_1(x)=e^{-x}\sum_{r=0}^{1}{}_1\mathrm{P}_{1-r}x^r=e^{-x}({}_1\mathrm{P}_1x^0+{}_1\mathrm{P}_0x)=e^{-x}(1+x)$$

であるから

$$I_1=\Big[-F_1(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}=\Big[F_1(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}$$

であり，$n=1$ のとき ①$'$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned}
I_{k+1}&=\int_{\alpha}^{\beta}x^{k+1}e^{-x}\,dx\\
&=\Big[-x^{k+1}e^{-x}\Big]_{\alpha}^{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta}(k+1)x^ke^{-x}\,dx\\
&=\Big[x^{k+1}e^{-x}\Big]_{\beta}^{\alpha}+(k+1)I_k\\
&=\Big[x^{k+1}e^{-x}\Big]_{\beta}^{\alpha}+(k+1)\Big[F_k(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}\qquad(\because\ \text{帰納法の仮定})\\
&=\Big[x^{k+1}e^{-x}+(k+1)F_k(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}\\
&=\left[x^{k+1}e^{-x}+(k+1)e^{-x}\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{P}_{k-r}x^r\right]_{\beta}^{\alpha}\\
&=\left[e^{-x}\left\{x^{k+1}+\sum_{r=0}^{k}(k+1){}_k\mathrm{P}_{k-r}x^r\right\}\right]_{\beta}^{\alpha}
\end{aligned}$$

ここで

$$(k+1)_k\mathrm{P}_{k-r} = (k+1)\cdot\frac{k!}{\{k-(k-r)\}!} = \frac{(k+1)!}{r!} = {}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-r}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \left[e^{-x}\left({}_{k+1}\mathrm{P}_0 x^{k+1} + \sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-r} x^r\right)\right]_\beta^\alpha \\ &= \left[e^{-x}\sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-r} x^r\right]_\beta^\alpha \\ &= \Big[F_{k+1}(x)\Big]_\beta^\alpha \end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも ①$'$ は成り立つ．

(i)(ii) より，すべての正の整数 $n$ に対し ①$'$ すなわち ① は成り立つ．　　……(証明終わり)