$a,\ b$ を定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2+2ax+b$ と定める．

(1) $a^2-b=0$ とする．不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,dx$ を求めよ．

(2) $a^2-b>0$ とする．$\alpha>\beta$ を満たす定数 $\alpha,\ \beta$ に対して $f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)$ とする．このとき，α と β を a と b を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,dx$ を $a,\ b$ を用いて表せ．

(24 室蘭工大 2)

【答】

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,dx=-\frac{1}{x+a}+C$ （C は積分定数）

(2) $\alpha=a+\sqrt{a^2-b},\ \beta=a-\sqrt{a^2-b}$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\log\left|\frac{x+a-\sqrt{a^2-b}}{x+a+\sqrt{a^2-b}}\right|+C$ （C は積分定数）

【解答】

$$f(x)=x^2+2ax+b$$

(1) $a^2-b=0$ より

$$f(x)=x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

であるから，$x\neq -a$ のとき

$$\int \frac{1}{f(x)}\,dx=\int (x+a)^{-2}\,dx$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{x+a}+C}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\textbf{ は積分定数)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $f(x)=0$ の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=a^2-b$$

である．$a^2-b>0$ より，$D>0$ であり，$f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．したがって，実数 $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ を用いて

$$f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)$$

とおくことができる．$f(x)=0$ の解は

$$x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$$

であるから

$$-\alpha=-a-\sqrt{a^2-b},\quad -\beta=-a+\sqrt{a^2-b}$$
$$\therefore\ \ \boldsymbol{\alpha=a+\sqrt{a^2-b},\quad \beta=a-\sqrt{a^2-b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) より，$a^2-b>0$ のとき $f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)\ (\alpha>\beta)$ であるから

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x+\alpha)(x+\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{x+\alpha}-\frac{1}{x+\beta}\right)$$

と変形される．

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{f(x)}\,dx &= \frac{1}{\beta-\alpha}\int\left(\frac{1}{x+\alpha}-\frac{1}{x+\beta}\right)dx \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}(\log|x+\alpha|-\log|x+\beta|)+C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\log\left|\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right|+C \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{a^2-b}}\log\left|\frac{x+a+\sqrt{a^2-b}}{x+a-\sqrt{a^2-b}}\right|+C \quad (\because\ (2)) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\log\left|\frac{x+a-\sqrt{a^2-b}}{x+a+\sqrt{a^2-b}}\right|+C} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．