以下の問いに答えよ．

(1) k が正の整数であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}$$

(2) n が正の整数であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき．次の不等式が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

(24 奈良教大 5)

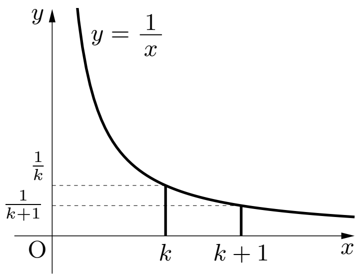
【答】 略

【解答】

(1) k は正の整数であり，$y = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で減少関数であるから，$k \leqq x \leqq k+1$ のとき

$$\frac{1}{k} \geqq \frac{1}{x} \geqq \frac{1}{k+1} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．



① の左の等号が成立するのは $x = k$ のときのみであるから，辺々積分すると

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$
$$= \frac{1}{k}\Big[x\Big]_k^{k+1} = \frac{1}{k}$$

となり，不等式

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(2) (1) で得られた不等式の辺々を $k = 1$ から $k = n$ まで加えると

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

が成り立つ．

$$(\text{左辺}) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

となるので，不等式

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(3) ① の右の等号が成立するのは $x = k+1$ のときのみであるから，辺々積分すると

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx = \frac{1}{k+1}\Big[x\Big]_k^{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

となるから，不等式

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

が成り立つ．n は 2 以上の整数であるから，辺々を $k=1$ から $k=n-1$ まで加えると

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

が成り立つ．

$$(\text{右辺}) = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_1^n = \log n$$

となるので，不等式

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

が成り立つ．よって，辺々に 1 を加えると，不等式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

が得られる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…… (証明終わり)