座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geqq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y, \quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ．

(1) D_a の面積 S_a を求めよ．

(2) $\lim_{a \to \infty} S_a$ を求めよ．

(24 京都大 理系 5)

【答】

(1) $S_a = 1 - (\sqrt{a^2+1} - \sqrt{a^2-1}) + a \log \dfrac{a + \sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2-1}}$

(2) $\lim_{a \to \infty} S_a = 1$

【解答】

$$D_a : \begin{cases} x \geqq 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y \\ y \leqq \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ y \leqq a \end{cases}$$

(1) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，$g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ とおく．

$f(x) > g(x)$ がつねに成り立つ．

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{2e^x}$$

$$g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

であり，$g(x)$ は単調増加な関数である．$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

また，$x \geqq 0$ における $y = a$ と $y = f(x)$ との交点の x 座標は

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = a$$

$$(e^x)^2 - 2ae^x + 1 = 0$$

$$e^x = a \pm \sqrt{a^2-1} \ (\geqq 0) \qquad \therefore \quad x = \log(a \pm \sqrt{a^2-1})$$

ここで

$$a - \sqrt{a^2-1} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2-1}} \leqq 1 \quad (\because \ a \geqq 1)$$

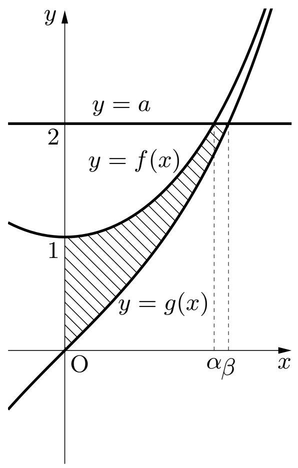
であるから，$x \geqq 0$ を満たす x は

$$x = \log(a + \sqrt{a^2-1})$$

である．

$y=a$ と $y=g(x)$ との交点の x 座標は

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=a$$
$$(e^x)^2-2ae^x-1=0$$
$$e^x=a+\sqrt{a^2+1}\ (\geqq 0)$$
$$\therefore\quad x=\log(a+\sqrt{a^2+1})$$



$\alpha=\log(a+\sqrt{a^2-1})$，$\beta=\log(a+\sqrt{a^2+1})$ とおくと，領域 D_a は右図の斜線部分となる．境界も含む．

D_a の面積 S_a は

$$\begin{aligned}
S_a&=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx+a(\beta-\alpha)-\int_0^{\beta}g(x)\,dx\\
&=\int_0^{\alpha}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx+a(\beta-\alpha)-\int_0^{\beta}\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx\\
&=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^{\alpha}+a(\beta-\alpha)-\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_0^{\beta}\\
&=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}+a(\beta-\alpha)-\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}+1
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
e^{\alpha}-e^{-\alpha}&=(a+\sqrt{a^2-1})-\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\\
&=(a+\sqrt{a^2-1})-(a-\sqrt{a^2-1})=2\sqrt{a^2-1}\\
e^{\beta}+e^{-\beta}&=(a+\sqrt{a^2+1})+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}\\
&=(a+\sqrt{a^2+1})+(\sqrt{a^2+1}-a)=2\sqrt{a^2+1}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
S_a&=\sqrt{a^2-1}+a\left\{\log(a+\sqrt{a^2+1})-\log(a+\sqrt{a^2-1})\right\}-\sqrt{a^2+1}+1\\
&=\boldsymbol{1-(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1})+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) まず

$$\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1})=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}=0\qquad\cdots\cdots\ ①$$

である．また

$$\lim_{a\to\infty}a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=\lim_{a\to\infty}a\log\left(1+\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$

$t=\dfrac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$ とおくと $\lim\limits_{a\to\infty}t=0$ $(\because$ ①$)$ である．したがって

$$\begin{aligned}
a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}&=a\log(1+t)=at\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\\
&=a\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\\
&=\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\\
&\underset{(a\to\infty)}{\longrightarrow}\frac{0}{1}\cdot\log e\quad(\because\ ①,\ e\text{ の定義})\\
&=0
\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{a \to \infty} S_a = 1 - 0 + 0 = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

- 不等式 $\begin{cases} 0 \leqq x \leqq b \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ が表す領域の面積を T_b とおく.【解答】の α, β を用いると

  $$T_\alpha < S_a < T_\beta \qquad \cdots\cdots ㋐$$

  が成り立つ．ここで

  $$T_b = \int_0^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_0^b \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \int_0^b e^{-x} dx$$

  $$= \Big[-e^{-x} \Big]_0^b = -e^{-b} + 1$$

  であるから

  $$㋐ \iff 1 - \frac{1}{e^\alpha} < S_a < 1 - \frac{1}{e^\beta}$$

  である．$a \to \infty$ のとき，$\alpha \to \infty$，$\beta \to \infty$ であり

  $$\lim_{a \to \infty} \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right) = \lim_{a \to \infty} \left(1 - \frac{1}{e^\beta}\right) = 1$$

  が成り立つから，はさみうちの原理により

  $$\lim_{a \to \infty} S_a = 1$$

  である.

- e^x をもとに定義される以下の関数を双曲線関数といいます.

  $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(ハイパボリックコサイン)}$$

  $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(ハイパボリックサイン)}$$

  $$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(ハイパボリックタンジェント)}$$

  三角関数と似た性質があります.

  $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

  $$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

  微分積分についても三角関数と似た性質があります.

  $$(\cosh x)' = \sinh x$$

  $$(\sinh x)' = \cosh x$$

  $$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

  $$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C \quad \text{(以下 C は積分定数)}$$

  $$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

  $$\int \tanh x\,dx = \log(\cosh x) + C$$

  本問の (1) により

  $y = \cosh x$ の逆関数は $y = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$
  $y = \sinh x$ の逆関数は $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

であることが示されました．

$y = \tanh x$ の逆関数は $y = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x}$

です．