関数

$$f(x) = x\log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

を考える．$y = f(x)$ で表される曲線を C とする．C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする．ただし，$\log t$ は t の自然対数である．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．
(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ．
(3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(24 北海道大 理系 5)

【答】

(1) $\ell : y = \left(2\log 2 + \dfrac{1}{2}\right)x$
(2) 略
(3) $2 - 2\log 2$

【解答】

$$f(x) = x\log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \log(x+2) + x \cdot \frac{1}{x+2} \\ &= \log(x+2) + \frac{x}{x+2} \end{aligned}$$

である．曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

であり，これが原点を通るとき

$$\begin{aligned} &0 = -tf'(t) + f(t) \\ &-t\left\{\log(t+2) + \frac{t}{t+2}\right\} + t\log(t+2) + 1 = 0 \\ &-\frac{t^2}{t+2} + 1 = 0 \\ &\frac{-t^2+t+2}{t+2} = 0 \\ \therefore\quad &t^2 - t - 2 = 0 \\ \therefore\quad &(t-2)(t+1) = 0 \\ \therefore\quad &t = 2,\ -1 \end{aligned}$$

である．このとき

$$\begin{aligned} &f'(2) = \log 4 + \frac{2}{2+2} = \log 4 + \frac{1}{2} > 0 \\ &f'(-1) = \log 1 + \frac{-1}{-1+2} = -1 < 0 \end{aligned}$$

ℓ は傾きが正で原点を通る接線であるから，ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{\ell : y = \left(2\log 2 + \frac{1}{2}\right)x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

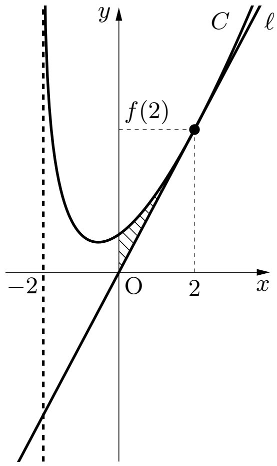
である．

(2) $f'(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+2} + \frac{1\cdot(x+2) - x\cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x+4}{(x+2)^2} \\ &> 0 \quad (\because\ x > -2) \end{aligned}$$

よって，曲線 C は下に凸である．　……(証明終わり)

(3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分は右図の斜線部分であり，この面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 f(x)dx - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot f(2) \\ &= \int_0^2 \{x\log(x+2)+1\}\,dx - 2\log 4 - 1 \\ &= \int_0^2 x\log(x+2)\,dx + \Big[x\Big]_0^2 - 4\log 2 - 1 \\ &= \int_0^2 x\log(x+2)\,dx - 4\log 2 + 1 \end{aligned}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} &\int_0^2 x\log(x+2)\,dx \\ &= \int_0^2 (x+2-2)\log(x+2)\,dx \\ &= \int_0^2 \{(x+2)\log(x+2) - 2\log(x+2)\}\,dx \\ &= \left[\frac{(x+2)^2}{2}\log(x+2)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{(x+2)^2}{2}\,\frac{1}{x+2}\,dx \\ &\qquad - 2\left\{\Big[(x+2)\log(x+2)\Big]_0^2 - \int_0^2 (x+2)\frac{1}{x+2}\,dx\right\} \\ &= 8\log 4 - 2\log 2 - \left[\frac{(x+2)^2}{4}\right]_0^2 - 2\left\{4\log 4 - 2\log 2 - \Big[x\Big]_0^2\right\} \\ &= 14\log 2 - (4-1) - 2(6\log 2 - 2) \\ &= 2\log 2 + 1 \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} S &= (2\log 2 + 1) - 4\log 2 + 1 \\ &= \mathbf{2 - 2\log 2} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．