関数 $f(x)=xe^{-2x}$ が極大値をとる x の値を a とする．また，m を 0 でない定数として $g(x)=\dfrac{1}{m}x$ とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ は，原点以外に，$x>a$ において共有点をもつとするとき，次の問いに答えよ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ を用いてよい．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，a の値を求めよ．

(2) m の値の範囲を求め，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の $x>a$ における共有点の座標を m を用いて表せ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(4) $0\leqq x\leqq a$ において，3 つの直線 $y=g(x)$，$y=0$，および $x=a$ で囲まれた部分の面積を $S_1(m)$ とする．また，$x\geqq a$ において，曲線 $y=f(x)$ と 2 つの直線 $y=g(x)$，$x=a$ で囲まれた部分の面積を $S_2(m)$ とする．

$$S(m)=S_1(m)+S_2(m)$$

とするとき，$S(m)$ を m を用いて表せ．

(5) (4) で求めた $S(m)$ を最小にする m の値と，そのときの $S(m)$ の値を求めよ．

(24 宇都宮大 データ経営 (理)・地域デ・工・農 4)

【答】

(1) $a=\dfrac{1}{2}$

(2) $m>e$

(3) $\displaystyle\int f(x)\,dx=-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C\quad$ (C は積分定数)

(4) $S(m)=\dfrac{1}{2e}-\dfrac{2\log m+(\log m)^2}{8m}$

(5) $m=e^{\sqrt{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{2e}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{4e^{\sqrt{2}}}$

【解答】

$$f(x)=xe^{-2x}$$

$$g(x)=\frac{1}{m}x$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=1\cdot e^{-2x}+x\cdot e^{-2x}(-2)\\&=(1-2x)e^{-2x}\end{aligned}$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

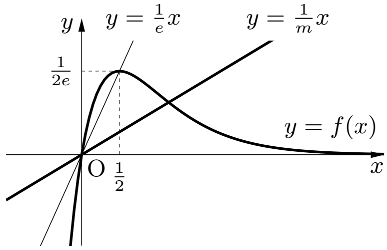
x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

極大値をとる x の値 a は

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 極大値は $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$ であり，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ であることより，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．



曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ は，原点以外に，$x>\frac{1}{2}$ において共有点をもつ条件は，原点と点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2e}\right)$ を通る直線の傾きが $\frac{1}{e}$ であるから

$$0<\frac{1}{m}<\frac{1}{e}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m>e} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．このとき，共有点の x 座標は

$$xe^{-2x}=\frac{1}{m}x$$

$$\therefore\quad m=e^{2x}\quad (\because\ x\fallingdotseq 0)$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\log m$$

であり，共有点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}\log m,\ \frac{1}{2m}\log m}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

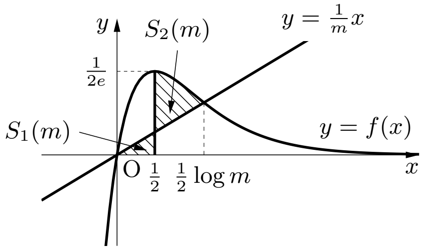
である．

(3) 部分積分法により

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}-\int 1\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\\ &= -\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C\quad (C\text{ は積分定数})\\ &= \boldsymbol{-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(4) $S_1(m)$，$S_2(m)$ は右図の斜線部分の面積であり



$$S_1(m)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m}=\frac{1}{8m}$$

$$\begin{aligned}S_2(m)&=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\log m}\left\{f(x)-\frac{1}{m}x\right\}dx\\ &=\left[-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{m}\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\log m}\\ &=-\frac{1+\log m}{4}e^{-\log m}-\frac{1}{m}\frac{(\log m)^2}{8}+\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{8m}\\ &=-\frac{1+\log m}{4m}-\frac{(\log m)^2}{8m}+\frac{1}{2e}+\frac{1}{8m}\\ &=\frac{1}{2e}-\frac{1+2\log m+(\log m)^2}{8m}\end{aligned}$$

である．

よって

$$\begin{aligned}S(m)&=S_1(m)+S_2(m)\\ &=\frac{1}{8m}+\left\{\frac{1}{2e}-\frac{1+2\log m+(\log m)^2}{8m}\right\}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{2e}-\frac{2\log m+(\log m)^2}{8m}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(5) $S(m)$ を m で微分すると

$$S'(m) = -\frac{1}{8}\cdot\frac{\left(\dfrac{2}{m}+2\log m\cdot\dfrac{1}{m}\right)\cdot m-\{2\log m+(\log m)^2\}\cdot 1}{m^2}$$
$$= -\frac{(2+2\log m)-2\log m-(\log m)^2}{8m^2}$$
$$= \frac{(\log m)^2-2}{8m^2}$$

$m > e$ に注意すると，$S'(m)$ は

$$\log m = \sqrt{2} \qquad \therefore \quad m = e^{\sqrt{2}}$$

で符号を変えから，$S(m)$ の増減は下表となる．

m	(e)	$\cdots$	$e^{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$S'(m)$		$-$	0	$+$
$S(m)$		$\searrow$		$\nearrow$

$S(m)$ は $\boldsymbol{m = e^{\sqrt{2}}}$ のとき ……(答)

最小値 $S\left(e^{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2e} - \dfrac{2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{8e^{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2e} - \dfrac{\sqrt{2}+1}{4e^{\sqrt{2}}}}$ ……(答)

をとる．