a は実数とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin 2x + a(\sin x - x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

と定める．また，O を原点とする xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とおく．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が $0 < x < \pi$ において極大値と極小値をとるように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(2) $a = 4$ とし，曲線 C の変曲点を P とする．

(i) 点 P の座標を求めよ．

(ii) 曲線 C と線分 OP で囲まれた部分の面積を求めよ．

(24 東京農工大 農・工 4)

【答】

(1) $4\sqrt{2} - 8 < a < 1$

(2) (i) $\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{8}{3}\pi\right)$ (ii) $\dfrac{27}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

【解答】

$$C : y = f(x) = \sin 2x + a(\sin x - x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1)
$$f'(x) = 2\cos 2x + a(\cos x - 1)$$

$f(x)$ が $0 < x < \pi$ において極大値と極小値をとるための条件は

「$f'(x)$ の符号が $0 < x < \pi$において

正から負に変わる x と負から正に変わる x が存在する」…… $(*)$

ことである．$0 < x < \pi$ のとき $1 > \cos x > -1$ であり

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - \cos x)\left(\frac{2\cos 2x}{1 - \cos x} - a\right) \\ &= (1 - \cos x)\left\{\frac{2(2\cos^2 x - 1)}{1 - \cos x} - a\right\} \end{aligned}$$

$\cos x = t$ とおくと，$0 < x < \pi$ のとき $t = \cos x$ は単調減少であり，$1 > t > -1$ であり

$$f'(x) = (1 - t)\left\{\frac{2(2t^2 - 1)}{1 - t} - a\right\}$$

である．$1 - t > 0$ より $g(t) = \dfrac{2(2t^2 - 1)}{1 - t}$ とおくと

$(*) \iff$「$g(t) - a$ の符号が $-1 < t < 1$ において

負から正に変わる t と正から負に変わる t が存在する」…… $(**)$

である．$y = g(t)$ のグラフと $y = a$ のグラフにより $g(t)$ と a の大小を比較する．

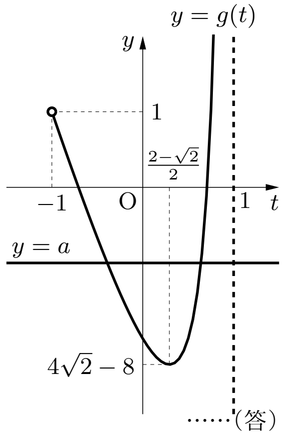
$$\begin{aligned} g'(t) &= 2 \cdot \frac{4t \cdot (1 - t) - (2t^2 - 1) \cdot (-1)}{(1 - t)^2} \\ &= -2 \cdot \frac{2t^2 - 4t + 1}{(1 - t)^2} \\ &= -4 \cdot \frac{\left(t - \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)\left(t - \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)}{(1 - t)^2} \end{aligned}$$

これより増減は下表のようになる．

t	(-1)	$\cdots$	$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\left\{2\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right\}}{1-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{2})^2-2}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{2}-8$$

$$\lim_{t\to1-0}g(t)=\infty$$



であり，$y=g(t)$ のグラフは右図となる．$y=a$ のグラフもあわせると，a の値の範囲は

$$\boldsymbol{4\sqrt{2}-8<a<1}$$ ……(答)

である．

(2) $a=4$ のとき

$$f(x)=\sin 2x+4(\sin x-x)\quad(0\leqq x\leqq\pi)$$

である．

(i) 微分すると

$$f'(x)=2\cos 2x+4(\cos x-1)$$
$$f''(x)=-4\sin 2x-4\sin x=-4\sin x(2\cos x+1)$$

$2\cos x+1=0$ すなわち $x=\dfrac{2}{3}\pi$ の前後で $f''(x)$ が符号が変わる．

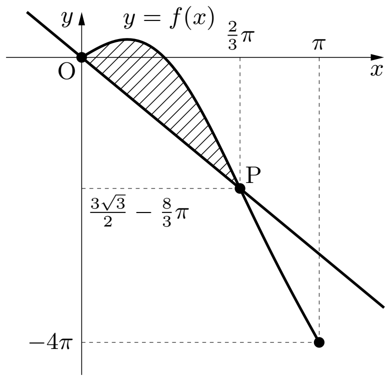
$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\frac{4}{3}\pi+4\left(\sin\frac{2}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{8}{3}\pi$$

であり，変曲点 P の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{8}{3}\pi\right)}$$ ……(答)

である．

(ii) (i) より，$0<x<\dfrac{2}{3}\pi$ では $f''(x)<0$ であり，曲線 C は上に凸である．よって，曲線 C と線分 OP で囲まれた図形は右図の斜線部分となる．直線 OP の方程式は (i) より



$$y=\frac{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{8}{3}\pi}{\dfrac{2}{3}\pi}x$$

$$\therefore\quad y=\frac{9\sqrt{3}-16\pi}{4\pi}x$$

であるから，求める面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left\{ (\sin 2x + 4(\sin x - x)) - \frac{9\sqrt{3} - 16\pi}{4\pi} x \right\} dx \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left(\sin 2x + 4\sin x - \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} x \right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos x - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} x^2 \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1 \right) - 4\left(-\frac{1}{2} - 1 \right) - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{4}{9}\pi^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{27}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．