xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2+y^2=1$ および円板 $D: x^2+y^2 \leqq 1$ を考える．D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする．$\mathrm{A}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$ とする．xyz 空間内の平面 $H: z=x$ を考える．すなわち，H は xz 平面上の直線 $z=x$ と線分 AB をともに含む平面である．K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする．

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく．$r(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく．θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{h\{\tau(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく．T を求めよ．必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2}=u$ とおく置換積分を用いてもよい．

(24 東北大 理系 6)

【答】

(1) $r(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}$

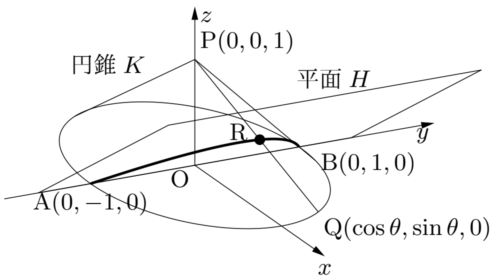
(2) 略

(3) $T=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解答】

(1) $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を結ぶ直線 PQ 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\ &=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\ &=(0,\ 0,\ 1)+t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1)\end{aligned}$$



と表すことができる．R は平面 $z=x$ 上の点でもあるから

$$1-t=t\cos\theta$$
$$\therefore\quad (1+\cos\theta)t=1$$

である．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \geqq 0$ であるから

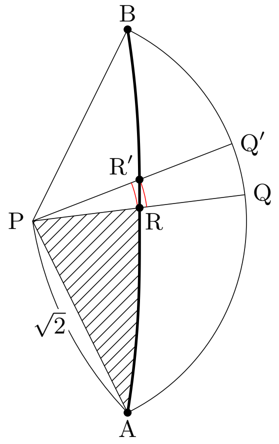
$$t=\frac{1}{1+\cos\theta}\ (>0)$$

である．よって

$$\begin{aligned}r(\theta)=\mathrm{PR}=|t||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|&=\frac{1}{1+\cos\theta}\times\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta+(-1)^2}\\ &=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(2) 円錐 K の側面の $x \geqq 0$ である部分を展開すると半径 $\sqrt{2}$ の扇形となる．$S(\theta)$ は右図の斜線部分の面積である．



$0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$h > 0$ である．

$\mathrm{Q}'(\cos(\theta+h),\ \sin(\theta+h),\ 0)$ とし，PQ' と E の交点を R' とする．展開図において $h' = \angle \mathrm{QPQ}'$ とおくと，$\overset{\frown}{\mathrm{QQ}'} = \sqrt{2}h'$ である．一方，C 上で $\overset{\frown}{\mathrm{QQ}'} = 1 \cdot h = h$ であるから

$$\sqrt{2}h' = h \text{ すなわち } h' = \frac{h}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．また，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $r(\theta)$ は増加するので，図形 PRR' の面積について

(半径 $r(\theta)$ で中心角 h'の扇形の面積)
$\leqq$(図形 PRR'の面積)
$\leqq$(半径 $r(\theta+h)$ で中心角 h'の扇形の面積)　　$\cdots\cdots$ ②

が成り立つ．図形 PRR' の面積は $S(\theta+h) - S(\theta)$ と表すことができるので，② は

$$\frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2 \cdot h' \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{1}{2}\{r(\theta+h)\}^2 \cdot h'$$

となり，① を代入すると

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ②'$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) $h > 0$ のとき，②′ の両辺を h で割ると

$$\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} \leqq \frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

となる．$r(\theta)$ が連続であることより

$$\lim_{h \to +0} \frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{h \to +0} \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ③$$

である．また，$0 \leqq \theta + h < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときは，$h < 0$ より $-h > 0$ であるから，(2) と同様にして

$$\frac{-h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta) - S(\theta+h) \leqq \frac{-h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

が成り立ち，両辺を $-h\ (> 0)$ で割ると

$$\frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} \leqq \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

となり，はさみうちの原理より

$$\lim_{h \to -0} \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ③'$$

である．③, ③′ より

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

すなわち

$$S'(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}(1+\cos\theta)^2}$$

である．これは $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のときも成り立つ．

円錐 K の側面のうち，円 C の $x\geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積 T は

$$\begin{aligned}
T&=(\text{扇形 PAB の面積})-S\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}S'(\theta)\,d\theta\\
&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta
\end{aligned}$$

ここで，$\tan\frac{\theta}{2}=u$ とおくと $\begin{array}{c|ccc}\theta & -\frac{\pi}{2} & \longrightarrow & \frac{\pi}{2}\\ \hline u & -1 & \longrightarrow & 1\end{array}$ であり

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,d\theta=du$$

$$\therefore\quad d\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}\,du=\frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\,du=\frac{2}{1+u^2}\,du$$

また

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{1+u^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta&=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+u^2}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du\\
&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+u^2)\,du\\
&=\frac{1}{2}\cdot 2\left[u+\frac{u^3}{3}\right]_0^1\\
&=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

である．

よって

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-\frac{2\sqrt{2}}{3}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．