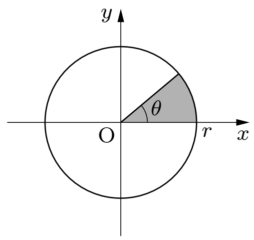
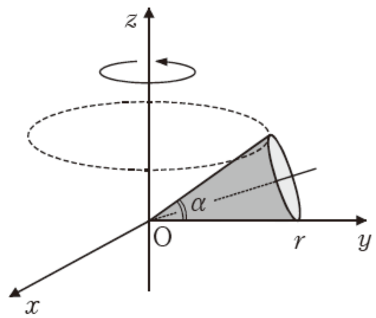
以下の問いに答えなさい．解答欄には計算過程も書きなさい．また，答えは最も簡潔な数式として表しなさい．



(1) 右図に示すように，xy 平面上の，中心角 θ，半径 r の扇形を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_1 を求めなさい．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(2) 母線の長さが r， 頂角が α の円錐を，下図のように母線が xy 平面に接し，頂点が原点 O に重なるように置く．その状態で円錐を z 軸の周りに 1 回転させたとき，円錐が通ることによってできる立体の体積 V_2 を求めなさい．ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．



(24 公立千歳科技大 中期 理工 5)

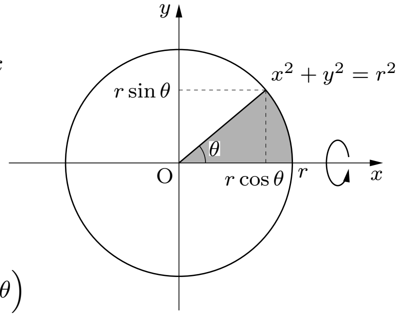
【答】

(1) $V_1 = \dfrac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)$

(2) $V_2 = \dfrac{2}{3}\pi r^3 \sin\alpha$

【解答】

(1) 求める体積 V_1 は



$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{3}\pi(r\sin\theta)^2\cdot r\cos\theta + \int_{r\cos\theta}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\sin^2\theta\cos\theta + \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{r\cos\theta}^{r} \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\sin^2\theta\cos\theta \\
&\qquad + \pi\left(\frac{2}{3}r^3 - r^3\cos\theta + \frac{r^3}{3}\cos^3\theta\right) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cos\theta + \pi r^3\left(\frac{2}{3}-\cos\theta\right) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\cos\theta + \pi r^3\left(\frac{2}{3}-\cos\theta\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

である．

(2) 円錐を z 軸の周りに 1 回転させたとき，円錐が通ることによってできる立体は原点 O を中心とする半径 r の半球の一部分である．

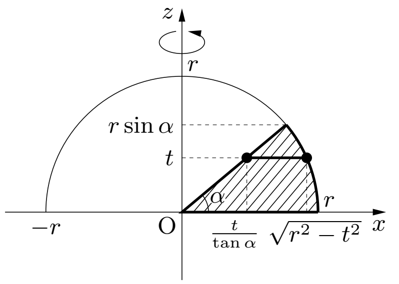
V_1 を θ の関数として $V(\theta)$ と表すと

$$\begin{aligned} V_2 &= (\text{半球の体積}) - V_1\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\} \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3(1-\sin\alpha) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi r^3 \sin\alpha} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

- (1) を用いずに V_2 を求める．

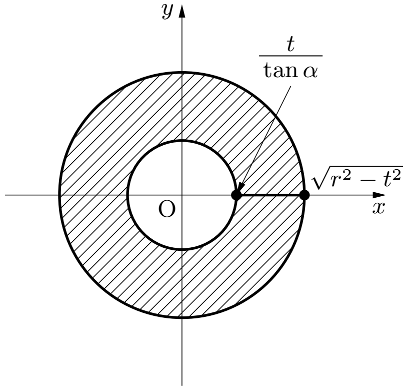
与えられた立体は zx 平面上の右図の斜線部分を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体と一致する．



xz 平面において，右の斜線部分の境界と直線 $z=t$ $(0<t<r\sin\alpha)$ との交点の座標は

$$\left(\frac{t}{\tan\alpha,},\ t\right),\ \left(\sqrt{r^2-t^2},\ t\right)$$

であり，この 2 点を結ぶ線分が z 軸の周りに回転してできる図形を xy 平面に射影すると，右下図の斜線部分となる．これは与えられた立体を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq r\sin\alpha)$ で切った切り口である．この切り口の面積 $S(t)$ は



$$\begin{aligned} S(t) &= \pi(r^2-t^2) - \pi\left(\frac{t}{\tan\alpha}\right)^2 \\ &= \pi\left\{r^2 - \left(1+\frac{1}{\tan^2\alpha}\right)t^2\right\} \\ &= \pi\left(r^2 - \frac{1}{\sin^2\alpha}t^2\right) \end{aligned}$$

である．

よって，求める体積 V_2 は

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{r\sin\alpha} S(t)\,dt \\ &= \pi\left[r^2 t - \frac{1}{\sin^2\alpha}\,\frac{t^3}{3}\right]_0^{r\sin\alpha} \\ &= \pi\left(r^3\sin\alpha - \frac{r^3\sin\alpha}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3\sin\alpha \end{aligned}$$

である．