$0<t<1$ とし，$y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq t)$ で定まる曲線を C とする．点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ を通り y 軸と平行な直線を ℓ_1，P を通り x 軸と平行な直線を ℓ_2 とする．ℓ_1，x 軸，C で囲まれる図形が x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする．ℓ_2，y 軸，C で囲まれる図形が y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $W(t)$ とする．このとき，次の問に答えよ．ただし，必要ならば

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t}{t^2}-\frac{\sin t}{t^3}\right)=-\frac{1}{3}$$

を用いてもよい．

(1) $V(t)$ を求めよ．

(2) $W(t)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{W(t)}{\pi t^2\sin t}$ を求めよ．

(24 北海道大 後 理・工 4)

【答】

(1) $V(t)=\dfrac{\pi}{4}(2t-\sin 2t)$

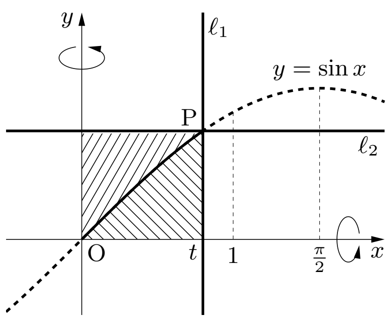
(2) $W(t)=\pi(t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t)$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{W(t)}{\pi t^2\sin t}=\frac{1}{3}$

【解答】

(1) $V(t)$ は ℓ_1，x 軸，C で囲まれる図形が x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積であるから

$$\begin{aligned}V(t)&=\int_0^t \pi\sin^2 x\,dx\\&=\pi\int_0^t\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^t\\&=\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}(2t-\sin 2t)}\quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$



である．

(2) $W(t)$ は ℓ_2，y 軸，C で囲まれる図形が y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積であるから

$$W(t)=\int_0^{\sin t}\pi x^2\,dy=\pi\int_0^t x^2\frac{dy}{dx}\,dx=\pi\int_0^t x^2\cos x\,dx$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx&=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx\\&=x^2\sin x+2x\cos x-\int 2\cos x\,dx\\&=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\quad(C\ \text{は積分定数})\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}W(t)&=\pi\left[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right]_0^t\\&=\boldsymbol{\pi(t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t)}\quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+0}\frac{W(t)}{\pi t^2\sin t} &= \lim_{t\to+0}\frac{\pi(t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t)}{\pi t^2\sin t}\\
&= \lim_{t\to+0}\left(1+\frac{2\cos t}{t\sin t}-\frac{2}{t^2}\right)\\
&= \lim_{t\to+0}\left\{1+\frac{2}{\sin t}\left(\frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\right)\right\}\\
&= \lim_{t\to+0}\left\{1+\frac{2}{\dfrac{\sin t}{t}}\left(\frac{\cos t}{t^2}-\frac{\sin t}{t^3}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t}{t^2}-\frac{\sin t}{t^3}\right)=-\frac{1}{3}$ を用いると

$$\lim_{t\to+0}\frac{W(t)}{\pi t^2\sin t}=1+\frac{2}{1}\left(-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

- マクローリン展開により

$$\begin{aligned}
\cos t &= 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
\sin t &= t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots
\end{aligned}$$

が成り立つ (大学の範囲).

$$1-\frac{t^2}{2!}<\cos t<1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}$$

$$\begin{cases}
t-\dfrac{t^3}{3!}<\sin t<t-\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!} & (t>0\text{ のとき})\\
t-\dfrac{t^3}{3!}>\sin t>t-\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!} & (t>0\text{ のとき})
\end{cases}$$

を得る．したがって，$t \fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2!}<\frac{\cos t}{t^2}<\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2!}+\frac{t^2}{4!}\\
&\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3!}<\frac{\sin t}{t^3}<\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3!}+\frac{t^2}{5!}
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2!}\right)-\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3!}+\frac{t^2}{5!}\right)\\
&\qquad<\frac{\cos t}{t^2}-\frac{\sin t}{t^3}<\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2!}+\frac{t^2}{4!}\right)-\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3!}\right)\\
&\therefore\quad -\frac{1}{3}-\frac{t^3}{5!}<\frac{\cos t}{t^2}-\frac{\sin t}{t^3}<-\frac{1}{3}+\frac{t^4}{4!}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

$$\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{3}-\frac{t^3}{5!}\right)=-\frac{1}{3},\quad \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{3}+\frac{t^4}{4!}\right)=-\frac{1}{3}$$

であり，はさみうちの原理より

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t}{t^2}-\frac{\sin t}{t^3}\right)=-\frac{1}{3}$$

である.