関数 $f(x)=e^x+e^{-2x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $f(x)=2$ となる x の値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた x の値のうち最小のものを a_1，最大のものを a_2 とする．$y=f(x)$ のグラフ，x 軸，直線 $x=a_1$，直線 $x=a_2$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(24 千葉大 6)

【答】

(1) $3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$

(2) $x=0,\ \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(3) $\dfrac{21-3\sqrt{5}}{8}\pi$

【解答】

$$f(x)=e^x+e^{-2x}$$

(1) 微分すると

$$f'(x)=e^x+e^{-2x}(-2)=(e^{3x}-2)e^{-2x}$$

$f'(x)$ の符号が変わるのは

$$e^{3x}-2=0 \quad \text{すなわち} \quad 3x=\log 2 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{3}\log 2$$

のときであり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ の最小値は

$$f\left(\frac{1}{3}\log 2\right)=e^{\frac{1}{3}\log 2}+e^{-\frac{2}{3}\log 2}=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}=\mathbf{3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 相加平均・相乗平均の関係を用いて最小値を求めることもできる．

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}+e^{-2x}\\ &\geqq 3\sqrt[3]{\frac{e^x}{2}\cdot\frac{e^x}{2}\cdot e^{-2x}} \quad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の関係})\\ &=3\cdot 2^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

等号は

$$\frac{e^x}{2}=e^{-2x} \qquad \therefore \quad e^{3x}=2 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{3}\log 2$$

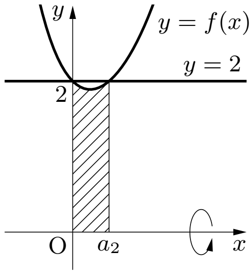
のとき成り立つから，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}\log 2$ のとき最小値 $3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$ をとる．

(2) $f(x)=2$ となる x の値は

$$e^x+e^{-2x}=2$$
$$e^{3x}-2e^{2x}+1=0$$
$$(e^x-1)(e^{2x}-e^x-1)=0$$
$$\therefore\quad e^x=1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad(\because\ e^x>0)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{x=0,\ \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $a_1=0,\ a_2=\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり，$y=f(x)$ のグラフ，x 軸，直線 $x=a_1$，直線 $x=a_2$ で囲まれる図形は右図の斜線部分である．この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は



$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{a_2}(e^x+e^{-2x})^2\,dx\\
&=\pi\int_0^{a_2}(e^{2x}+2e^{-x}+e^{-4x})\,dx\qquad\cdots\cdots ①\\
&=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}-2e^{-x}-\frac{e^{-4x}}{4}\right]_0^{a_2}\\
&=\pi\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-4}-\left(\frac{1}{2}-2-\frac{1}{4}\right)\right\}\\
&=\pi\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}+\frac{7}{4}\right\}\\
&=\pi\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}-2\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7+3\sqrt{5}}+\frac{7}{4}\right)\\
&=\pi\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{4}-(\sqrt{5}-1)-\frac{7-3\sqrt{5}}{8}+\frac{7}{4}\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{21-3\sqrt{5}}{8}\pi}\qquad\cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．

- ① は $e^x=t$ とおいて置換積分してもよい．

$$e^x\,dx=dt\qquad\therefore\quad e^x=\frac{1}{t}\,dt$$

x	$0\ \longrightarrow\ \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
t	$1\ \longrightarrow\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

であるから，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_1^{\alpha}(t^2+2t^{-1}+t^{-4})\cdot\frac{1}{t}\,dt\\
&=\pi\int_1^{\alpha}(t+2t^{-2}+t^{-5})\,dt\\
&=\pi\left[\frac{t^2}{2}-\frac{2}{t}-\frac{1}{4t^4}\right]_1^{\alpha}\\
&=\pi\left\{\frac{\alpha^2}{2}-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4\alpha^4}-\left(\frac{1}{2}-2-\frac{1}{4}\right)\right\}
\end{aligned}$$

α は $\alpha^2-\alpha-1=0$ を満たすから

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \alpha+1 \\
\frac{1}{\alpha} &= \alpha-1 \\
\frac{1}{\alpha^4} &= (\alpha-1)^4 = (\alpha^2-2\alpha+1)^2 = \{(\alpha+1)-2\alpha+1\}^2 \\
&= (-\alpha+2)^2 = (\alpha+1)-4\alpha+4 = -3\alpha+5
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
V &= \pi\left\{\frac{\alpha+1}{2}-2(\alpha-1)-\frac{1}{4}(-3\alpha+5)+\frac{7}{4}\right\} \\
&= \pi\left(-\frac{3}{4}\alpha+3\right) \\
&= \pi\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+3\right) \\
&= \frac{21-3\sqrt{5}}{8}\pi
\end{aligned}$$

である.