$a > 1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．

(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1,\ y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ．

(24 大阪大 理系 4)

【答】

(1) $V_1 = 2\pi a^2 + \pi^2 a + \dfrac{4}{3}\pi$

(2) $a = \dfrac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$

【解答】

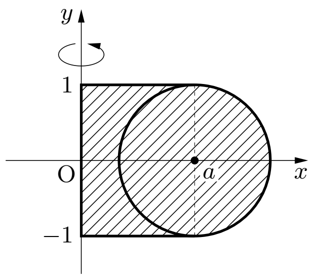
(1) 円 C の方程式は

$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

であり，円 C の $x \geqq a$ の部分の方程式は

$$x = a + \sqrt{1-y^2}$$

である．V_1 は右図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積であるから

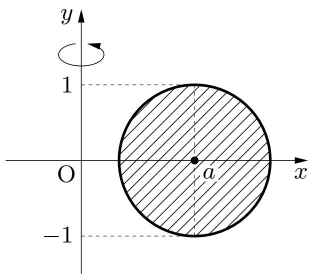


$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-1}^{1} (a + \sqrt{1-y^2})^2\,dy \\ &= 2\pi\int_0^1 (a^2 + 2a\sqrt{1-y^2} + 1 - y^2)\,dy \quad (\because\ \text{偶関数}) \\ &= 2\pi\left[(a^2+1)y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 + 4\pi a\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \\ &= 2\pi\left(a^2 + 1 - \frac{1}{3}\right) + 4\pi a \times \frac{1}{4}\pi \quad (\because\ \text{四分円の面積}) \\ &= \boldsymbol{2\pi a^2 + \pi^2 a + \frac{4}{3}\pi} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) V_2 は円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積であるから



$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{-1}^{1} \pi\{(a + \sqrt{1-y^2})^2 - (a - \sqrt{1-y^2})^2\}\,dy \\ &= 2\pi\int_0^1 4a\sqrt{1-y^2}\,dy \quad (\because\ \text{偶関数}) \\ &= 8\pi a \times \frac{1}{4}\pi \quad (\because\ \text{四分円の面積}) \\ &= 2\pi^2 a \end{aligned}$$

である．$V_1 = 2V_2$ となる a の値は

$$2\pi a^2 + \pi^2 a + \frac{4}{3}\pi = 2 \times 2\pi^2 a$$

$$2\pi a^2 - 3\pi^2 a + \frac{4}{3}\pi = 0$$

$$6a^2 - 9\pi a + 4 = 0$$

$$\therefore \quad a = \frac{9\pi \pm \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$$

となる．$f(a)=6a^2-9\pi a+4$ とおくと

$$f(1)=6-9\pi+4=10-9\pi<0$$

であるから，$f(a)=0$ は 1 より大きい解と小さい解をもつ．$a>1$ より，求める a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 回転で自分自身と重ならない図形の体積については，重心の位置と断面積がわかると

  $$(体積)=(重心の移動距離)\times(断面積) \qquad (パップス・ギュルダンの定理)$$

  が成り立つ (高校数学の範囲外でありこれは検算用として使う)．本問では

  $$V_2=2\pi a\times\pi 1^2=2\pi^2 a$$

  である．