$f(x)=\sqrt{x+2}$ とする．関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1，その逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフを C_2 とする．

(1) $f^{-1}(x)$ を求めよ．
(2) C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ．
(3) C_1，C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．
(4) 直線 $y=x$，C_2 および y 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(24 札幌医大 4)

【答】
(1) $f^{-1}(x)=x^2-2\quad(x\geqq 0)$
(2) (2，2)
(3) $\dfrac{20-4\sqrt{2}}{3}$
(4) $\dfrac{22+32\sqrt{2}}{15}\pi$

【解答】

$$f(x)=\sqrt{x+2}$$

$$C_1: y=f(x),\quad C_2: y=f^{-1}(x)$$

(1) $y=\sqrt{x+2}\ (x\geqq -2)\ \cdots\cdots$ ① を x について解くと

$$① \iff \begin{cases} y^2=x+2 \\ y\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y^2-2 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{f^{-1}(x)=x^2-2\quad(x\geqq 0)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\begin{cases} x\geqq -2 \\ x\geqq 0 \end{cases}$ すなわち $x\geqq 0$ のもとで C_1 と C_2 の共有点の座標を求める．共有点では

$$\sqrt{x+2}=x^2-2\ \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

$$② \iff \begin{cases} x+2=(x^2-2)^2 \\ x^2-2\geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^4-4x^2-x+2=0 & \cdots\cdots ③ \\ x\geqq \sqrt{2}\quad(\because\ x\geqq 0) & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③ を変形すると

$$x^2(x^2-4)-(x-2)=0$$

$$(x-2)\{x^2(x+2)-1\}=0$$

となる．

$$x^2(x+2)-1\geqq 2(\sqrt{2}+2)-1>0\quad(\because\ ④)$$

であり，$x^2(x+2)-1\neq 0$ であるから

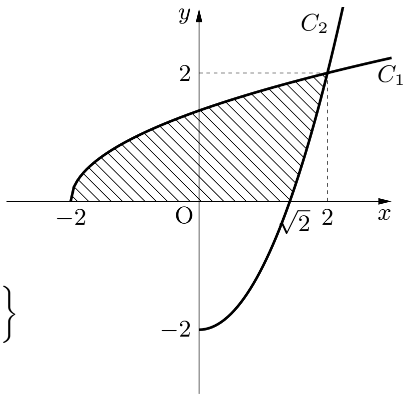
$$x=2$$

であり，交点の座標は

$$\boldsymbol{(2,\ 2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

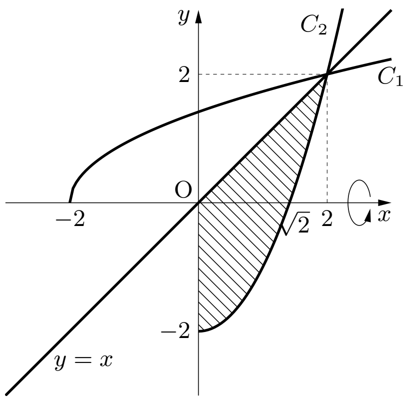
(3) C_1, C_2 および x 軸で囲まれた部分は右図の斜線部分である．この面積は

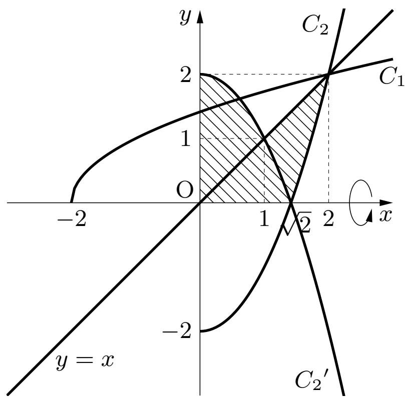


$$
\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{\sqrt{2}}^{2} f^{-1}(x)\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} (x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^2-2)\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= \frac{2}{3}(8-0) - \left\{\frac{8-2\sqrt{2}}{3} - 2(2-\sqrt{2})\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{20-4\sqrt{2}}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．

(4) 直線 $y=x$, C_2 および y 軸で囲まれた部分は下左図の斜線部分であり，C_2 を x 軸に関して対称移動した曲線 $y=-x^2+2$ を ${C_2}'$ とおくと，下左図の斜線部分の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は下右図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体と一致する．





直線 $y=x$ と ${C_2}'$ の交点の座標は $(1,\ 1)$ であるから，求める体積は

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{1} \pi(-x^2+2)^2\,dx + \int_{1}^{2} \pi x^2\,dx - \int_{\sqrt{2}}^{2} \pi(x^2-2)^2\,dx \\
&= \pi\int_{0}^{1}(x^4-4x^2+4)\,dx + \pi\int_{1}^{2} x^2\,dx - \pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^4-4x^2+4)\,dx \\
&= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 4\cdot\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{0}^{1} + \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} - \pi\left[\frac{x^5}{5} - 4\cdot\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= \pi\left\{\frac{3-20+60}{15} + \frac{7}{3} - \frac{3(32-4\sqrt{2}) - 20(8-2\sqrt{2}) + 60(2-\sqrt{2})}{15}\right\} \\
&= \left(\frac{43}{15} + \frac{7}{3} - \frac{56-32\sqrt{2}}{15}\right)\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{22+32\sqrt{2}}{15}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．