$x>0$ に対して，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする．そして，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を l とする．以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $y=f(x)$ を微分せよ．
(2) 接線 l の方程式を求めよ．
(3) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ．
(4) 曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べ，変曲点を求めよ．
(5) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および接線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．
(6) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=\sqrt{e}$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(24 豊橋技科大 3)

【答】

(1) $f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

(2) $l:y=\dfrac{1}{2e}x$

(3) 極大値 $f(e)=\dfrac{1}{e}$

(4) 変曲点 $\left(e\sqrt{e},\ \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

(5) $S=\dfrac{1}{8}$

(6) $V=\left(2-\dfrac{13}{4\sqrt{e}}\right)\pi$

【解答】

$$f(x)=\frac{\log x}{x}$$

(1) 微分して

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\boldsymbol{\frac{1-\log x}{x^2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) l は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)$ における接線であり

$$f'(\sqrt{e})=\frac{1-\log\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$$

であるから，l の方程式は

$$y=\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e})+\frac{1}{2\sqrt{e}}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{l:y=\frac{1}{2e}x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $f'(x)$ の符号は $x=e$ を境に正から負に変わるから，関数 $y=f(x)$ は

$$x=e\ \text{で}\quad \textbf{極大値}\ \boldsymbol{f(e)=\frac{1}{e}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる．

(4) $f'(x)$ を微分すると

$$f''(x) = \frac{-\dfrac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

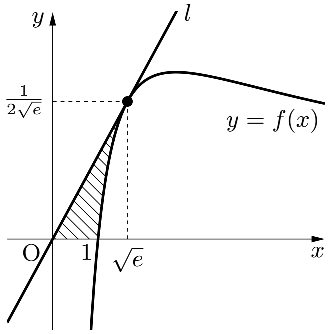
$f''(x)$ の符号は $x = e^{\frac{3}{2}}$ を境に負から正に変わる．すなわち $y = f(x)$ の凹凸は，$0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ で上に凸であり，$e^{\frac{3}{2}} < x$ で下に凸である．

また，曲線 $y = f(x)$ の変曲点は

$$\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right) \text{すなわち} \left(\boldsymbol{e\sqrt{e}},\ \boldsymbol{\frac{3}{2e\sqrt{e}}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

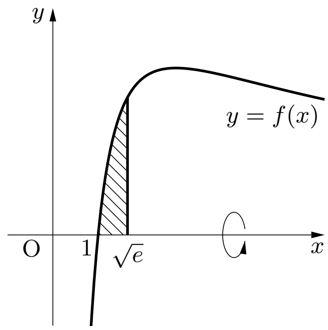
(5) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および接線 l で囲まれた部分は右の斜線部分であり，この面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{4} - \int_1^{\sqrt{e}} \log x (\log x)'\,dx \\ &= \frac{1}{4} - \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{8}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(6) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = \sqrt{e}$ で囲まれた部分は右の斜線部分であり，これを x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\sqrt{e}} \{f(x)\}^2\,dx \\ &= \pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x^2}\,dx \\ &= \pi \left[\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot (\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &\qquad - \pi \int_1^{\sqrt{e}} \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{\pi}{4\sqrt{e}} + 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2} \log x\,dx \\ &= -\frac{\pi}{4\sqrt{e}} + 2\pi \left[\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \log x\right]_1^{\sqrt{e}} - 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{\pi}{4\sqrt{e}} - 2\pi \frac{1}{2\sqrt{e}} + 2\pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= -\frac{5}{4\sqrt{e}}\pi + 2\pi \left(-\frac{1}{\sqrt{e}} + 1\right) \\ &= \boldsymbol{\left(2 - \frac{13}{4\sqrt{e}}\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．