n を自然数とし，媒介変数 t $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{n+2}\right)$ を用いて

$$x_n = (n+1)\cos t + \cos((n+1)t)$$
$$y_n = (n+1)\sin t - \sin((n+1)t)$$

で表される曲線を C_n とする．また，

$$S_n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{n+2}} \left(x_n\frac{dy_n}{dt} - y_n\frac{dx_n}{dt}\right)dt$$

とし，L_n を C_n の長さとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dx_n}{dt}$，$\dfrac{dy_n}{dt}$ を求めよ．

(2) S_n を求めよ．

(3) L_n を求めよ．

(4) $a_n = \dfrac{S_1S_2\cdots S_n}{n!L_1L_2\cdots L_n}$ とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(24 愛知県大 情報科学 3)

【答】

(1) $\dfrac{dx_n}{dt} = -(n+1)\{\sin t + \sin((n+1)t)\}$，$\dfrac{dy_n}{dt} = (n+1)\{\cos t - \cos((n+1)t)\}$

(2) $S_n = \dfrac{n(n+1)}{n+2}\pi$

(3) $L_n = \dfrac{8(n+1)}{n+2}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{8-\pi}$

【解答】

$$C : \begin{cases} x_n = (n+1)\cos t + \cos((n+1)t) \\ y_n = (n+1)\sin t - \sin((n+1)t) \end{cases}$$

(1) t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dx_n}{dt} &= -(n+1)\sin t - (n+1)\sin((n+1)t) \\ &= \boldsymbol{-(n+1)\{\sin t + \sin((n+1)t)\}} \qquad \cdots\cdots(答) \\ \frac{dy_n}{dt} &= (n+1)\cos t - (n+1)\cos((n+1)t) \\ &= \boldsymbol{(n+1)\{\cos t - \cos((n+1)t)\}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

となる．

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned}x_n\frac{dy_n}{dt} &= (n+1)\{(n+1)\cos t + \cos((n+1)t)\}\{\cos t - \cos((n+1)t)\} \\ &= (n+1)\{(n+1)\cos^2 t - n\cos t\cos((n+1)t) - \cos^2((n+1)t)\} \\ y_n\frac{dx_n}{dt} &= -(n+1)\{(n+1)\sin t - \sin((n+1)t)\}\{\sin t + \sin((n+1)t)\} \\ &= -(n+1)\{(n+1)\sin^2 t + n\sin t\sin((n+1)t) - \sin^2((n+1)t)\}\end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&x_n\frac{dy_n}{dt}-y_n\frac{dx_n}{dt}\\
&=(n+1)\{(n+1)-n\cos t\cos((n+1)t)+n\sin t\sin((n+1)t)-1\}\\
&=(n+1)\{n-n\cos t\cos((n+1)t)+n\sin t\sin((n+1)t)\}\\
&=n(n+1)\{1-\cos((n+2)t)\}
\end{aligned}
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\left(x_n\frac{dy_n}{dt}-y_n\frac{dx_n}{dt}\right)dt\\
&=\frac{n(n+1)}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\{1-\cos((n+2)t)\}\,dt\\
&=\frac{n(n+1)}{2}\left[t-\frac{\sin((n+2)t)}{n+2}\right]_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2\pi}{n+2}\\
&=\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{n+2}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．

(3) (1) の結果より

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2\\
&=(n+1)^2\{\sin t+\sin((n+1)t)\}^2+(n+1)^2\{\cos t-\cos((n+1)t)\}^2\\
&=(n+1)^2\{\sin^2 t+2\sin t\sin((n+1)t)+\sin^2((n+1)t)\\
&\qquad\qquad+\cos^2 t-2\cos t\cos((n+1)t)+\cos^2((n+1)t)\}\\
&=2(n+1)^2\{1-\cos((n+2)t)\}\\
&=4(n+1)^2\sin^2\left(\frac{n+2}{2}t\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$0\leqq\frac{n+2}{2}t\leqq\frac{n+2}{2}\cdot\frac{2\pi}{n+2}=\pi$ であり，$\sin\left(\frac{n+2}{2}t\right)\geqq 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
L_n&=\int_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\sqrt{\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2}\,dt\\
&=2(n+1)\int_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\sin\left(\frac{n+2}{2}t\right)dt\\
&=2(n+1)\left[-\frac{2}{n+2}\cos\left(\frac{n+2}{2}t\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\\
&=2(n+1)\left(\frac{2}{n+2}+\frac{2}{n+2}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{8(n+1)}{n+2}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．

(4) (2)，(3) の結果より

$$
\frac{S_k}{L_k}=\frac{k(k+1)}{k+2}\pi\cdot\frac{k+2}{8(k+1)}=\frac{k\pi}{8}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
$$

であり

$$
a_n=\frac{S_1S_2\cdots S_n}{n!L_1L_2\cdots L_n}=\frac{1}{n!}\left(\frac{1\pi}{8}\right)\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cdots\left(\frac{n\pi}{8}\right)=\left(\frac{\pi}{8}\right)^n
$$

である．

$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \frac{\pi}{8}$，公比 $\frac{\pi}{8}$ $\left(\left|\frac{\pi}{8}\right| < 1\right)$ の等比数列であり，この無限等比級数は収束する．その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{\pi}{8}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8-\pi}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．