

$(x-1)^8$ を展開しなさい。

(24 岩手県大 中期 ソフト情 1(1))

【答】 $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$

【解答】

二項定理を用いると

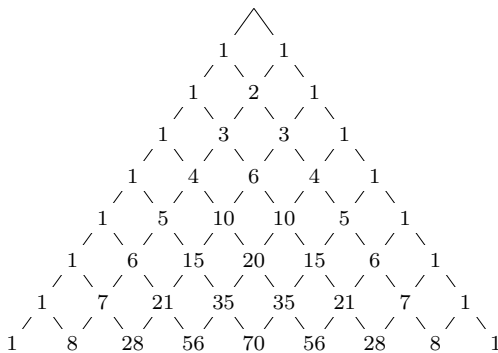
$$\begin{aligned} & (x-1)^8 \\ &= \sum_{k=0}^8 {}_8C_k x^k (-1)^{8-k} \\ &= {}_8C_0 (-1)^8 + {}_8C_1 x (-1)^7 + {}_8C_2 x^2 (-1)^6 + {}_8C_3 x^3 (-1)^5 \\ &\quad + {}_8C_4 x^4 (-1)^4 + {}_8C_5 x^5 (-1)^3 + {}_8C_6 x^6 (-1)^2 + {}_8C_7 x^7 (-1) + {}_8C_8 x^8 \end{aligned}$$

降べきの順に並べると

$$= x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

- 二項係数 ${}_n C_k$ の値は下図のパスカルの三角形を利用した。



- 二項定理を用いず順次展開すると

$$\begin{aligned} (x-1)^8 &= (x^2 - 2x + 1)^4 \\ &= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)^2 \\ &= x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \times \end{array} \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^4 - 2x^3 + x^2 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\ \times \end{array} \begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\ \hline x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4 \\ -4x^7 + 16x^6 - 24x^5 + 16x^4 - 4x^3 \\ \quad 6x^6 - 24x^5 + 36x^4 - 24x^3 + 6x^2 \\ \quad \quad -4x^5 + 16x^4 - 24x^3 + 16x^2 - 4x \\ \quad \quad \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\ \hline x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1 \end{array} \end{array}$$