n を 3 以上の奇数とする．円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき，その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ．

(24 一橋大 5)

【答】 $p_n = \dfrac{n+1}{4(n-2)}$

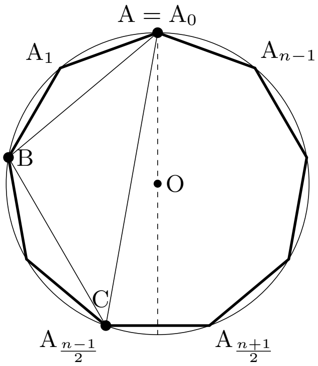
【解答】

円の中心を O，正 n 角形の頂点を反時計回りに A_0，A_1，$\cdots$，A_{n-1} とおく．

相異なる 3 点の選び方は

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \text{ 通り}$$

あり，これらは同様に確からしい．



選んだ 3 点を頂点とする三角形の内部に O が含まれるのは，三角形が鋭角三角形のときである．n は奇数なので，2 点を結ぶ線分が正 n 角形の外接円の直径となることはなく，3 点を頂点とする三角形は鋭角三角形か鈍角三角形のいずれかである．

余事象を考える．3 点を反時計回りに A，B，C としたとき，∠B が鈍角となる鈍角三角形 ABC は，A の選び方が

$$n \text{ 通り，}$$

この点を A_0 とおくと，B，C の選び方は，A_1 から $\mathrm{A}_{\frac{n-1}{2}}$ までの頂点から 2 個を選べばよい．$\dfrac{n-1}{2} \geqq 2$，すなわち $n \geqq 5$ のとき

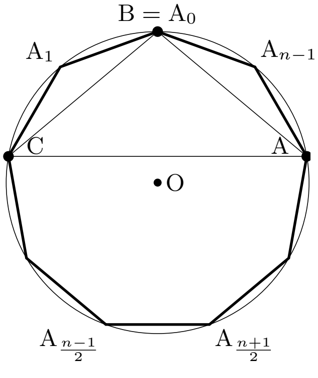
$$\begin{aligned} n \cdot {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 &= n \cdot \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-3)}{8} \text{ 通り} \end{aligned}$$

ある．$n=3$ のとき △ABC は正三角形であり鈍角三角形は 0 通り，上式は $n=3$ のときも成り立つ．

よって，求める確率 p_n は

$$p_n = 1 - \frac{\frac{n(n-1)(n-3)}{8}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} = 1 - \frac{3(n-3)}{4(n-2)} = \boldsymbol{\frac{n+1}{4(n-2)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- 3 点を反時計回りに A，B，C としたとき，鈍角となる頂点 B に着目する．

  B の選び方が

  $$n \text{ 通り，}$$

  この点を A_0 とおくと，C，A の選び方は B を含まない弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ の長さが半円周の長さより大きい，これは $\mathrm{C} = \mathrm{A}_i$，$\mathrm{A} = \mathrm{A}_j$ とおくと

  $$\begin{cases} 1 \leqq i < j \leqq n-1 \\ j - i > \dfrac{n-1}{2} \end{cases}$$

  である．

ij 平面に点 $(i,\ j)$ を図示すると右図の黒丸となる．$(n-1)-\dfrac{n+1}{2} \geqq 1$ のとき，すなわち $n \geqq 5$ のとき，黒丸の総数は

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+\left(n-1-\frac{n+1}{2}\right)\\ &=1+2+\cdots+\frac{n-3}{2}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{n-3}{2}+1\right)\\ &=\frac{(n-1)(n-3)}{8}\end{aligned}$$

である．これは $n=3$ のときも成り立つ．

したがって，鈍角三角形の個数は

$$n\cdot\frac{(n-1)(n-3)}{8}\ \text{個}$$

である．以下,【解答】と同じ.