n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_3 を求めよ．
(2) p_4 を求めよ．

(24 京都大 文系 2)

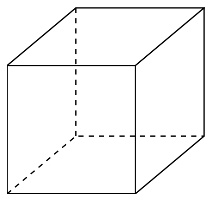
【答】

(1) $p_3 = \dfrac{2}{243}$

(2) $p_4 = \dfrac{3}{128}$

【解答】

立方体を固定し，各面を「上, 下，前，後，左，右」として区別する．ただし，組 {上下}，{前後}，{左右} は向かい合う 2 面の組である．



(1) 立方体の 6 面を 3 色で塗り分ける方法は 3^6 通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち，条件

「辺を共有するどの二つの面にも異なる色を塗る」…… $(*)$

ことができるのは，向かい合う面の組 {上下}，{前後}，{左右} をこの 3 色で塗り分けるときである (3 色のうちの 1 色または 2 色で $(*)$ を満たすように塗ることはできない)．この塗り方は

$3!$ 通り

あるから，求める確率 p_3 は

$$\frac{3!}{3^6} = \frac{2}{3^5} = \mathbf{\frac{2}{243}} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 立方体の 6 面を 4 色で塗り分ける方法は 4^6 通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち，条件 $(*)$ を満たすように塗ることができるのは 3 色または 4 色を用いるときである．

(i) 立方体の 6 面を 3 色で $(*)$ を満たすように塗り分けるには，4 色から 3 色を選び，向かい合う面の組 {上下}，{前後}，{左右} をこの 3 色を用いて塗り分ければよい．この塗り方は

$$\underbrace{{}_4\mathrm{C}_3}_{色} \times 3! = 4 \times 3 \cdot 2 \text{ 通り}$$

ある．

(ii) 立方体の 6 面をちょうど 4 色で $(*)$ を満たすように塗り分けるには，向かい合う 2 つの面の組がそれぞれ同じ色となり，残りの向かい合う 2 面が異なる色を塗ればよい．同じ色を塗る組の決め方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りあるから

$$\underbrace{{}_3\mathrm{C}_2}_{2\text{ つの組}} \times 4! = 3 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ 通り}$$

ある．

(i)(ii) より，求める確率 p_4 は

$$p_4 = \frac{4 \times 3 \cdot 2 + 3 \times 4 \cdot 3 \cdot 2}{4^6} = \frac{(1+3)4 \cdot 3 \cdot 2}{4^6} = \frac{3}{4^3 \cdot 2} = \mathbf{\frac{3}{128}} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．