数直線上を動く点 X が原点の位置にある．1 から 6 の目をもつサイコロを 1 個投げて，出た目の回数だけコインを投げる．コインの表面が出るたびに X を正の向きに 2 だけ進め，裏面が出るたびに X を負の向きに 1 だけ進める．サイコロを 1 回投げるとき，原点からの点 X の距離が 1 以下となる確率を求めなさい．

(24 公立千歳科技大 中期 理工 1(8))

【答】 $\dfrac{139}{384}$

【解答】

サイコロを 1 個投げるとき出た目を k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$，コインを k 回投げるとき表面が出る回数を a，裏面が出る回数を b とおく．原点からの点 X の距離が 1 以下となるのは

$$\begin{cases} a+b=k \\ |2a-b| \leqq 1 \end{cases}$$

のときであり，これは

$$(*)\begin{cases} b=k-a \\ |3a-k| \leqq 1 \end{cases}$$

と変形される．k の目が出て原点からの点 X の距離が 1 以下となる確率を p_k とおくと

(i) $k=1$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} b=1-a \\ |3a-1| \leqq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leqq 3a-1 \leqq 1 \qquad \therefore \quad 0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}$$

a は 0 以上の整数であるから $(a,\ b)=(0,\ 1)$

$$p_1=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2\cdot 3}$$

(ii) $k=2$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} b=2-a \\ |3a-2| \leqq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leqq 3a-2 \leqq 1 \qquad \therefore \quad \frac{1}{3} \leqq a \leqq 1$$

a は 0 以上の整数であるから $(a,\ b)=(1,\ 1)$

$$p_2=\frac{1}{6}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^2\cdot 3}$$

(iii) $k=3$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} b=3-a \\ |3a-3| \leqq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leqq 3a-3 \leqq 1 \qquad \therefore \quad \frac{2}{3} \leqq a \leqq \frac{4}{3}$$

a は 0 以上の整数であるから $(a,\ b)=(1,\ 2)$

$$p_3=\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2^4}$$

(iv) $k=4$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} b=4-a \\ |3a-4| \leqq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leqq 3a-4 \leqq 1 \qquad \therefore \quad 1 \leqq a \leqq \frac{5}{3}$$

a は 0 以上の整数であるから $(a,\ b)=(1,\ 3)$

$$p_3 = \frac{1}{6} \times {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3 \cdot 3}$$

(v) $k=5$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} b=5-a \\ |3a-5| \leqq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leqq 3a-5 \leqq 1 \qquad \therefore \quad \frac{4}{3} \leqq a \leqq 2$$

a は 0 以上の整数であるから $(a,\ b)=(2,\ 3)$

$$p_3 = \frac{1}{6} \times {}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^5 \cdot 3}$$

(vi) $k=6$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} b=6-a \\ |3a-6| \leqq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leqq 3a-6 \leqq 1 \qquad \therefore \quad \frac{5}{3} \leqq a \leqq \frac{7}{3}$$

a は 0 以上の整数であるから $(a,\ b)=(2,\ 4)$

$$p_3 = \frac{1}{6} \times {}_6\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^7}$$

(i)〜(vi) より，求める確率は

$$\begin{aligned} p_1+p_2+\cdots+p_6 &= \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{5}{2^5 \cdot 3} + \frac{5}{2^7} \\ &= \frac{32+32+24+16+20+15}{2^7 \cdot 3} \\ &= \boldsymbol{\frac{139}{384}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．