1 から 6 までの数字が一つずつ各面に書かれているが，面に書かれている数字を消して元の数字とは別の数字（ただし 1 から 6 までの数字）に書き換えることができる六面体のサイコロがある．書き換える際に，どの数字に書き換えられるかは同様に確からしいものとする．数字を書き換える前 (1 から 6 が一つずつ書かれている状態）のサイコロを「前サイコロ」と呼ぶ．一方，一つの面の数字を消して別の数字に書き換えたサイコロを「後サイコロ」と呼ぶ．

(1) 「後サイコロ」の面に書かれている数字の合計を S_1 とする（例えば,「前サイコロ」の「4」の面の数字が「1」に書き換えられた場合，$S_1 = 1+2+3+1+5+6 = 18$ となる）．このとき $S_1 > 18$ となる確率を求めよ．

(2) 「前サイコロ」を二つ用意し，それぞれの「後サイコロ」を作成する．二つの後サイコロの面に書かれている数字の合計を S_2 とする（例えば，一つ目の「前サイコロ」の「4」の面の数字が「1」に書き換えられ，二つ目の「前サイコロ」の「3」の面の数字が「2」に書き換えられた場合，$S_2 = (1+2+3+1+5+6)+(1+2+2+4+5+6) = 38$ となる）．このとき $S_2 = 36$ となる確率を求めよ．

(24 札幌医大 3.tex)

【答】

(1) $\dfrac{4}{5}$

(2) $\dfrac{7}{180}$

【解答】

(1) 「後サイコロ」の面に書かれている数字の合計 S_1 の

$$\begin{aligned}&\text{最小値は}\quad 1+2+3+4+5+1=16,\\&\text{最大値は}\quad 6+2+3+4+5+6=26\end{aligned}$$

である．$S_1 = 16,\ 17,\ 18$ となる確率を求める．

(i) $S_1 = 16$ となるのは,「前サイコロ」の「6」の面の数字が「1」に書き換えられて

$$1+2+3+4+5+1\ (=16)$$

となるときであり，この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

である．

(ii) $S_1 = 17$ となるのは,「前サイコロ」の「6」の面の数字が「2」に，または「前サイコロ」の「5」の面の数字が「1」に書き換えらて

$$1+2+3+4+5+2\ (=17),$$
$$1+2+3+4+1+6\ (=17)$$

となるときであり，この確率は

$$2\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{30}$$

である．

(iii) $S_1 = 18$ となるのは,「前サイコロ」の「6」の面の数字が「3」に，または「前サイコロ」の「5」の面の数字が「2」に，または「前サイコロ」の「4」の面の数字が「1」に書き換えられて

$$1+2+3+4+5+3\ (=18),$$
$$1+2+3+4+2+6\ (=18),$$
$$1+2+3+1+5+6\ (=18)$$

となるときであり，この確率は

$$3\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{30}$$

である．

よって，$S_1>18$ となる確率は

$$1-\left(\frac{1}{30}+\frac{2}{30}+\frac{3}{30}\right)=1-\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{4}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 二つの後サイコロの面に書かれている数字の合計 S_2 は，1 つ目の「後サイコロ」の面に書かれている数字の合計 を s_1，2 つ目の「後サイコロ」の面に書かれている数字の合計を s_2 とおくと

$$S_2=s_1+s_2$$

である．$S_2=36$ となるのは

$$(s_1,\ s_2)=(16,\ 20),\ (17,\ 19),\ (18,\ 18),\ (19,\ 17),\ (20,\ 16)$$

のときである．s_1，s_2 が k となる確率は，$S_1=k$ となる確率と一致する．(1) と同じく考えて

(iv) $S_1=19$ となるのは

$$\begin{aligned}&1+2+3+4+5+4\ (=19),\\&1+2+3+4+3+6\ (=19),\\&1+2+3+2+5+6\ (=19),\\&1+2+1+4+5+6\ (=19)\end{aligned}$$

となるときであり，この確率は

$$4\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{30}$$

である．

(v) $S_1=20$ となるのは

$$\begin{aligned}&1+2+3+4+5+5\ (=20),\\&1+2+3+4+4+6\ (=20),\\&1+2+3+3+5+6\ (=20),\\&1+2+2+4+5+6\ (=20),\\&1+1+2+4+5+6\ (=20)\end{aligned}$$

となるときであり，この確率は

$$5\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{30}$$

である．

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{30}+\frac{2}{30}\cdot\frac{4}{30}+\frac{3}{30}\cdot\frac{3}{30}+\frac{4}{30}\cdot\frac{2}{30}+\frac{5}{30}\cdot\frac{1}{30}\\&=\frac{5+8+9+8+5}{900}=\frac{35}{900}=\boldsymbol{\frac{7}{180}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．