$n$ を 5 以上の奇数とする．平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 $n$ 角形を考える．$n$ 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ．ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする．選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 $p_n$ を求めよ．

(24 東京大 文 4)

---

【答】 $\dfrac{n+1}{2(n-2)}$

---

【解答】

$n$ は 5 以上の奇数であり，正 $n$ 角形の頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_0$，$\mathrm{A}_1$，$\cdots$，$\mathrm{A}_{n-1}$ とおく．

相異なる 4 点の選び方は

$$_n\mathrm{C}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \text{ 通り}$$

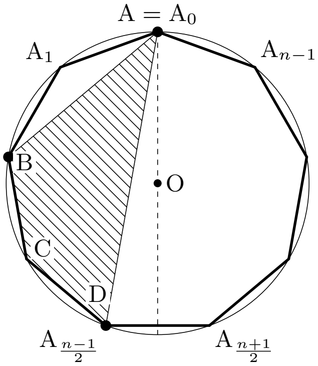
あり，これらは同様に確からしい．

$n$ は奇数なので，2 点を結ぶ線分が正 $n$ 角形の外接円の直径となることはない．選んだ 4 点を頂点とする四角形の内部に O が含まれない場合 (すなわち，余事象) を考える．

4 点を反時計回りに A，B，C，D としたとき，A の選び方は

$$n \text{ 通り}$$

ある．この点を $\mathrm{A}_0$ とおくと，B，C，D は，$\mathrm{A}_1$ から $\mathrm{A}_{\frac{n-1}{2}}$ までの頂点から 3 個を選ぶことになる．$\dfrac{n-1}{2} \geqq 3$，すなわち $n \geqq 7$ のとき，4 点の選び方は




$$\begin{aligned} n \cdot {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3 &= n \cdot \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-5}{2}}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48} \text{ 通り} \end{aligned}$$

ある．$n=5$ のときこのような四角形は存在しないから 0 通り，上式は $n=5$ のときも成り立つ．

よって，求める確率 $p_n$ は

$$p_n = 1 - \frac{\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = 1 - \frac{(n-5)}{2(n-2)} = \boldsymbol{\frac{n+1}{2(n-2)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．