A，B，C，D の 4 つのチームがあり，その中の 2 つのチームが対戦し必ず勝敗が決まるゲームを行う．A と他の 3 つのいずれかのチームが対戦する場合に A が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$，C または D のいずれかと B が対戦する場合に B が勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$，C と D が対戦する場合に C が勝つ確率は $\dfrac{1}{4}$ である．4 つのそれぞれのチームが図 1 のア，イ，ウ，エのいずれかの場所に割り振られたトーナメント表を作成する．作成されたトーナメント表に従って 1 回戦 (注) で勝ったチーム同士が決勝戦を行い，決勝戦で勝ったチームを優勝とする．

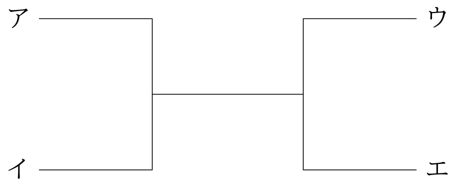


図 1

(注)：1 回戦とはアとイの場所に割り振られたチーム同士の対戦，およびウとエの場所に割り振られたチーム同士の対戦である．

1) A がア，B がイ，C がウ，D がエに割り振られたトーナメント表が作成されたとする．

(1) A が決勝戦を行う確率を求めなさい．また，C が決勝戦を行う確率を求めなさい．

(2) A と D が決勝戦で対戦する確率を求めなさい．

(3) C が優勝する確率を求めなさい．

2) 以下の方法で抽選を行いトーナメント表を作成する．最初に，ア，イ，ウ，エの文字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを袋に入れる．各チームは A，B，C，D の順にこの袋から 1 枚ずつカードを取り出していき，トーナメント表の中で取り出したカードに書かれた文字の場所に割り振られる．ただし，取り出したカードは袋に戻さない．また，袋に入っているそれぞれのカードを取り出す確率は等しいとする．

(1) A と B が 1 回戦で対戦する確率を求めなさい．

(2) 作成される可能性のあるすべてのトーナメント表のうち，C が優勝する確率が最も高いトーナメント表を 1 つ書き，その理由も示しなさい．

(3) 「C が優勝する確率が最も高いトーナメント表が作成され」かつ「C が優勝しない」確率を求めなさい．

(24 帯広畜産大 2)

【答】

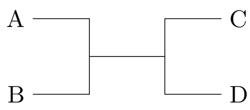
1) (1) A が決勝戦を行う確率は $\dfrac{1}{2}$，B が決勝戦を行う確率は $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{3}{8}$　(3) $\dfrac{7}{48}$

2) (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) 略　(3) $\dfrac{1}{4}$

【解答】

1) (1) A が決勝戦を行うのは，1 回戦で A が B に勝つときであるから，この確率は $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ である． ……(答)

C が決勝戦を行うのは，1 回戦で C が D に勝つときであるから，この確率は $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ である． ……(答)



(2) A と D が決勝戦で対戦するは，A と D が 1 回戦で勝つときであるから，この確率は

$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{\frac{3}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) C が優勝するのは,「1 回戦で C が D に勝ち」，さらに「1 回戦で A が B に勝ち決勝戦で C が A に勝つ」または「1 回戦で B が A に勝ち決勝戦で C が B に勝つ」ときである．この確率は

$$\underset{\mathrm{C}}{\frac{1}{4}}\times\left(\underset{\mathrm{A}}{\frac{1}{2}}\times\underset{\mathrm{C}}{\frac{1}{2}}+\underset{\mathrm{B}}{\frac{1}{2}}\times\underset{\mathrm{C}}{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{3+4}{12}=\mathbf{\frac{7}{48}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

2) (1) A と B が 1 回戦で対戦するとき，A の場所に対し B の場所は一通りに決まる．袋に入っているそれぞれのカードを取り出す確率は等しいから，求める確率は

$$\frac{4}{4}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 1)(3) の $\dfrac{7}{48}$ は C が D と 1 回戦で対戦し C が優勝する確率である．

同じように，C がどのチームと 1 回戦で対戦するかで場合分けすると

(i) C が A と 1 回戦で対戦し C が優勝する確率は

$$\underset{\mathrm{C}}{\frac{1}{2}}\times\left(\underset{\mathrm{B}}{\frac{1}{3}}\times\underset{\mathrm{C}}{\frac{2}{3}}+\underset{\mathrm{D}}{\frac{2}{3}}\times\underset{\mathrm{C}}{\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4+3}{18}=\frac{7}{36}$$

(ii) C が B と 1 回戦で対戦し C が優勝する確率は

$$\underset{\mathrm{C}}{\frac{2}{3}}\times\left(\underset{\mathrm{A}}{\frac{1}{2}}\times\underset{\mathrm{C}}{\frac{1}{2}}+\underset{\mathrm{D}}{\frac{1}{2}}\times\underset{\mathrm{C}}{\frac{1}{4}}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2+1}{8}=\frac{1}{4}$$

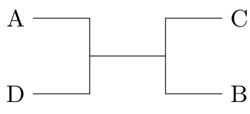
3 つの確率を比較すると

$$\frac{7}{48}<\frac{7}{36}<\frac{1}{4}$$

であり，C が優勝する確率が最も高いのは C が B と 1 回戦で対戦するときである．

このときのトーナメント表の 1 つは左表がある．

…… (証明終わり)



(3) C が優勝する確率が最も高いトーナメント表が作成されるという事象を X ，C が優勝しないという事象を Y とおくと，求める確率は

$$P(X\cap Y)=P(X)P_X(Y)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right) \quad (\because\ (2)(\mathrm{i}))$$

$$=\mathbf{\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 直計算するなら

$$P(X\cap Y)=P(X)P_X(Y)=\frac{1}{3}\times\left\{\underset{\mathrm{B}}{\frac{1}{3}}+\underset{\mathrm{C}}{\frac{2}{3}}\times\left(\underset{\mathrm{A}}{\frac{1}{2}}\times\underset{\mathrm{A}}{\frac{1}{2}}+\underset{\mathrm{D}}{\frac{1}{2}}\times\underset{\mathrm{D}}{\frac{3}{4}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2\times5}{3\cdot8}\right)=\frac{1}{4}$$

となる．