1 個のさいころを 3 回投げたとき，出た目の数を順に $a_1$，$a_2$，$a_3$ とし，その 3 個の数の積 $a_1a_2a_3$ を $N$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，答えが分数になるときは既約分数で答えよ．

(1) $N=3$ である確率を求めよ．
(2) $N=4$ である確率を求めよ．
(3) $N$ が 3 の倍数である確率を求めよ．
(4) $N$ が 4 の倍数である確率を求めよ．
(5) $N$ が 12 の倍数である確率を求めよ．
(6) $N$ が 4 の倍数であったとき，3 個の数 $a_1$，$a_2$，$a_3$ のうち少なくとも 1 個は奇数である確率を求めよ．

(24 豊橋技科大 4)

---

【答】

(1) $\dfrac{1}{72}$　(2) $\dfrac{1}{36}$　(3) $\dfrac{19}{27}$　(4) $\dfrac{5}{8}$　(5) $\dfrac{91}{216}$　(6) $\dfrac{4}{5}$

---

【解答】

(1) $N=3$ であるのは，$a_1$，$a_2$，$a_3$ のいずれか 1 つが 3 で他の 2 つが 1 のときである．この確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{72}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $N=4$ であるのは，$a_1$，$a_2$，$a_3$ のうち

- いずれか 1 つが 4 で他の 2 つが 1
- いずれか 2 つが 2 で残りの 1 つが 1

のときであり，これらは排反である．この確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{6}=\frac{1}{72}+\frac{1}{72}=\boldsymbol{\frac{1}{36}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $N$ が 3 の倍数であるのは，$a_1$，$a_2$，$a_3$ の少なくとも一つが 3 の目または 6 の目が出るときある．余事象を考えると求める確率は

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^3=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{19}{27}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $N$ が 4 の倍数であるのは，偶数の目の個数で場合分けすると，$a_1$，$a_2$，$a_3$ のうち

- 4 の目が 1 つで，他の 2 つは奇数
- 偶数の目が 2 つで，他の 1 つは奇数
- 偶数の目が 3 つ

のときであり，これらは排反である．この確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{6}\right)^2\frac{3}{6}+\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1+3+1}{2^3}=\boldsymbol{\frac{5}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(5) $N$ が 12 の倍数であるのは，$N$ が 3 の倍数かつ 4 の倍数となるときである．$N$ が 3 の倍数となる事象を $A$，$N$ が 4 の倍数となる事象を $B$ とおくと，求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})\\&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}\end{aligned}$$

である．ここで

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{19}{27} = \frac{8}{3^3},$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{2^3}$$

である．また，$\overline{A} \cap \overline{B}$ であるのは

- 1 の目または 5 の目が 3 つ
- 2 の目が 1 つで，他の 2 つは 1 の目または 5 の目

ときであり，これらは排反である．この確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1 \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} = \frac{2+3}{2\cdot 3^3} = \frac{5}{2\cdot 3^3}$$

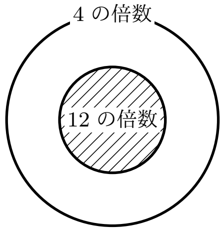
である．

以上より，求める確率 $P(A \cap B)$ は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - \left(\frac{8}{3^3} + \frac{3}{2^3} - \frac{5}{2\cdot 3^3}\right) \\ &= 1 - \frac{64 + 81 - 20}{2^3 \cdot 3^3} \\ &= 1 - \frac{125}{216} \\ &= \boldsymbol{\frac{91}{216}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

- $N$ が 4 の倍数である確率から 12 の倍数でない確率を除いてもよい．




  $N$ が 4 の倍数であり 12 の倍数でないのは，偶数の目の個数で場合分けすると，$a_1$，$a_2$，$a_3$ のうち
  - 4 の目が 1 つで，他の 2 つは 3 以外の奇数
  - 6 以外の偶数の目が 2 つで，他の 1 つは 3 以外の奇数
  - 6 以外の偶数の目が 3 つ

  のときであり，これらは排反である．この確率は

  $${}_3\mathrm{C}_1 \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^2 + {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \frac{2}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{12 + 24 + 8}{6^3} = \frac{44}{6^3}$$

  であるから，求める確率は

  $$(4\text{ の倍数である確率}) - \frac{44}{6^3} = \frac{5}{8} - \frac{44}{6^3} = \frac{135 - 44}{6^3} = \frac{91}{216}$$

  である．

(6) 3 個の数 $a_1$，$a_2$，$a_3$ のうち少なくとも 1 個は奇数である事象を $C$ とおくと，求める確率は

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}$$

$B \cap C$ であるのは

- 4 の目が 1 つで，他の 2 つは奇数
- 偶数の目が 2 つで，他の 1 つは奇数

のときであり，これらは排反である．この確率は

$$P(B \cap C) = {}_3\mathrm{C}_1 \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^2 + {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{3}{6}\right)^2 \frac{3}{6} = \frac{1+3}{2^3} = \frac{1}{2}$$

である．

よって，求める確率 $P_B(C)$ は

$$P_B(C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$ ……(答)

である．