各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある.「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている．このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える．最初の持ち点は 0 とし，この試行を繰り返す．例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる．なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ．また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする．

(1) この試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下である確率を求めよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

(2) この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ．

(24 北海道大 理系 2)

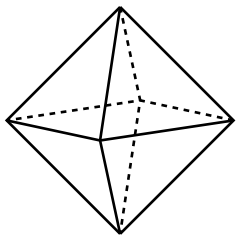
【答】

(1) $\dfrac{(n^2+19n+50)5^{n-2}}{2\cdot 8^n}$

(2) $\dfrac{7}{960}$

【解答】

(1) 試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下であるのは，持ち点が 0, 1, 2 のいずれかのときである．



- 持ち点が 0 であるのは，出た面に書かれた数がすべて「0」であるときであり，この確率は
$$\left(\frac{5}{8}\right)^n$$
である．
- 持ち点が 1 であるのは，出た面に書かれた数が「1」が 1 回,「0」が $n-1$ 回のときであり，この確率は
$${}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}=\frac{n5^{n-1}}{8^n}$$
である．
- 持ち点が 2 であるのは，出た面に書かれた数が
「1」が 2 回で「0」が $n-2$ 回
または
「2」が 1 回で「0」が $n-1$ 回
のときであり，これらは排反である．この確率は
$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\\&=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{5^{n-2}}{8^n}+\frac{n5^{n-1}}{8^n}\\&=\frac{n(n+9)5^{n-2}}{2\cdot 8^n}\end{aligned}$$
である．

以上より，求める確率は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{5}{8}\right)^n+\frac{n5^{n-1}}{8^n}+\frac{n(n+9)5^{n-2}}{2\cdot 8^n}\\&=\frac{\{50+10n+n(n+9)\}5^{n-2}}{2\cdot 8^n}\\&=\boldsymbol{\frac{(n^2+19n+50)5^{n-2}}{2\cdot 8^n}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) 試行を 4 回行って持ち点が 10 以上となる事象を A，試行を 6 回行って持ち点が 17 以上となる事象を B とおくと，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

である．

A が起こるのは，持ち点が 10，11，12 のいずれかのときである．

- 持ち点が 10 であるのは，出た面に書かれた数が

  「3」が 3 回,「1」が 1 回
  　または
  「3」が 2 回,「2」が 2 回

  のときであり，これらは排反である．この確率は

  $${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{4}{8^4}+\frac{6}{8^4}=\frac{10}{8^4}$$

  である．
- 持ち点が 11 であるのは，出た面に書かれた数が「3」が 3 回,「2」が 1 回のときであり，この確率は

  $${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{8}\right)^3\frac{1}{8}=\frac{4}{8^4}$$

  である．
- 持ち点が 12 であるのは，出た面に書かれた数がすべて「3」であるときであり，この確率は

  $$\left(\frac{1}{8}\right)^4$$

  である．

したがって

$$P(A)=\frac{10}{8^4}+\frac{4}{8^4}+\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{15}{8^4}$$

である．

$A\cap B$ が起こるのは

- 試行を 4 回行ったとき持ち点が 11 となり，次の 2 回の試行で出た面に書かれた数がどちらも「3」であるときであり，この確率は

  $$\frac{4}{8^4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{4}{8^6}$$

  である．
- 試行を 4 回行って持ち点が 12 となり，次の 2 回の試行で出た面に書かれた数が

  「3」が 2 回出る
  　または
  「3」が 1 回,「2」が 1 回出る

ときであり，これらは排反である．この確率は

$$\left(\frac{1}{8}\right)^4 \cdot \left\{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \frac{1}{8}\frac{1}{8}\right\} = \frac{3}{8^6}$$

である．

したがって

$$P(A \cap B) = \frac{4}{8^6} + \frac{3}{8^6} = \frac{7}{8^6}$$

である．

以上より，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{\frac{7}{8^6}}{\frac{15}{8^4}} = \frac{7}{15 \cdot 8^2} = \boldsymbol{\frac{7}{960}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．