A，B，C，D の 4 人が，以下のゲーム 1 を行い,「ゲーム 1 の勝者」を 1 人決める．続いて「ゲーム 1 の勝者」を除く 3 人が，以下のゲーム 2 を行い,「ゲーム 2 の勝者」を 1 人決める．

(ゲーム 1) A，B，C，D がこの順番で「さいころを投げる操作」を，誰かが 1 または 2 の目を出すまで繰り返す．1 または 2 の目を最初に出した人を「ゲーム 1 の勝者」とする．

(ゲーム 2) 「ゲーム 1 の勝者」を除く残りの 3 人が，順番に「さいころを投げる操作」を，誰かが 1, 2, 3 のいずれかの目を出すまで繰り返す．1, 2, 3 のいずれかの目を最初に出した人を「ゲーム 2 の勝者」とする．ただし，A が「ゲーム 1 の勝者」の場合は B，C，D がこの順番で，B が「ゲーム 1 の勝者」の場合は A，C，D がこの順番で，C が「ゲーム 1 の勝者」の場合は A，B，D がこの順番で，D が「ゲーム 1 の勝者」の場合は A，B，C がこの順番で，それぞれ「さいころを投げる操作」を繰り返すものとする．

ゲーム 1 とゲーム 2 において「さいころを投げる操作」とは，1 人が 1 個のさいころを 1 回投げることを指す.

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) ゲーム 1 とゲーム 2 を合わせて，ちょうど 5 回の「さいころを投げる操作」で「ゲーム 2 の勝者」が決まる確率を求めよ．

(2) ゲーム 1 とゲーム 2 を合わせて，ちょうど 10 回の「さいころを投げる操作」で「ゲーム 2 の勝者」が C に決まる確率を求めよ．

(3) ゲーム 1 とゲーム 2 を合わせて，ちょうど 10 回の「さいころを投げる操作」で「ゲーム 2 の勝者」が C に決まったとき，A が「ゲーム 1 の勝者」となる条件付き確率を求めよ．

(24 愛知県大 情報科学 2)

【答】

(1) $\dfrac{175}{1296}$

(2) $\dfrac{139}{31104}$

(3) $\dfrac{64}{139}$

【解答】

ゲーム 1 では n 回の「さいころを投げる操作」で「ゲーム 1 の勝者」が決まり，ゲーム 2 では m 回の「さいころを投げる操作」で「ゲーム 2 の勝者」が決まる確率を $p(n,\ m)$ とおく．

(1) 求める確率は $n+m=5$ のときの $p(n,\ m)$ である．

$n+m=5$ を満たす組 $(n,\ m)$ は

$$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

の 4 通りがある．

$$
\begin{aligned}
p(1,\ 4) &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4 \cdot 3}, \\
p(2,\ 3) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}, \\
p(3,\ 2) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3^3}, \\
p(4,\ 1) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2^2}{3^4}
\end{aligned}
$$

より，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&p(1,\ 4) + p(2,\ 3) + p(3,\ 2) + p(4,\ 1) \\
&= \frac{27 + 36 + 48 + 64}{2^4 \cdot 3^4} = \boldsymbol{\frac{175}{1296}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．

(2) $n + m = 10$ であり「ゲーム 2 の勝者」が C に決まるときを考える．

C は「ゲーム 2 の勝者」であるから $n \fallingdotseq 3, 7$ である．

(i) $n = 1$ のとき，A が「ゲーム 1 の勝者」であり，ゲーム 2 では B，C，D の順番で「さいころを投げる操作」を 9 回行い勝者が決まる．このときの勝者は D であり，不適．

(ii) $n = 2$ のとき，B が「ゲーム 1 の勝者」であり，ゲーム 2 では A，C，D の順番で「さいころを投げる操作」を 8 回行い勝者が決まる．このときの勝者は C である．

(iii) $n = 4$ のとき，D が「ゲーム 1 の勝者」であり，ゲーム 2 では A，B，C の順番で「さいころを投げる操作」を 6 回行い勝者が決まる．このときの勝者は C である．

(iv) $n = 5$ のとき，A が「ゲーム 1 の勝者」であり，ゲーム 2 では B，C，D の順番で「さいころを投げる操作」を 5 回行い勝者が決まる．このときの勝者は C である．

(v) $n = 6$ のとき，B が「ゲーム 1 の勝者」であり，ゲーム 2 では A，C，D の順番で「さいころを投げる操作」を 4 回行い勝者が決まる．このときの勝者は A であり，不適．

(vi) $n = 8$ のとき，D が「ゲーム 1 の勝者」であり，ゲーム 2 では A，B，C の順番で「さいころを投げる操作」を 2 回行い勝者が決まる．このときの勝者は B であり，不適．

(vii) $n = 9$ のとき，A が「ゲーム 1 の勝者」であり，ゲーム 2 では B，C，D の順番で「さいころを投げる操作」を 1 回行い勝者が決まる．このときの勝者は B であり，不適．

したがって，$n + m = 10$ であり「ゲーム 2 の勝者」が C に決まる組 $(n,\ m)$ は

$$(2,\ 8), (4,\ 6), (5,\ 5)$$

の 3 通りに限られる．

$$
\begin{aligned}
p(2,\ 8) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7 \cdot 3^2}, \\
p(4,\ 6) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3 \cdot 3^4}, \\
p(5,\ 5) &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3^5}
\end{aligned}
$$

であり，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&p(2,\ 8) + p(4,\ 6) + p(5,\ 5) \\
&= \frac{27 + 48 + 64}{2^7 \cdot 3^5} = \boldsymbol{\frac{139}{31104}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．

(3) (2) の (ii)(iii)(iv) のうち，A が「ゲーム 1 の勝者」となるは (iv) のときである．

よって，さいころを投げる操作ちょうど 10 回で「ゲーム 2 の勝者」が C に決まったとき，A が「ゲーム 1 の勝者」となる条件付き確率は

$$
\frac{p(5, 5)}{p(2,8) + p(4,6) + p(5,5)} = \frac{\dfrac{1}{2 \cdot 3^5}}{\dfrac{139}{2^7 \cdot 3^5}} = \frac{2^6}{139} = \boldsymbol{\frac{64}{139}}
$$

……(答)

である．