点 P はさいころを投げるごとに三角形 $A_1A_2A_3$ の頂点を動くものとする．初め P は点 A_1 にある．P が点 A_t $(t=1,\ 2,\ 3)$ にあるとき，P は出た目によって次のように動く．

- 出た目 s が $t,\ 4,\ 5,\ 6$ のいずれかであるとき，P は点 A_t にとどまる．
- 出た目 s が $t,\ 4,\ 5,\ 6$ のいずれでもないとき，P は点 A_s に移動する．

さいころを k 回目に投げた直後の点 P の位置を P_k とする．以下，n を 2 以上の整数とする．

(1) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のいずれに対しても $P_k=A_2$ とはならず，かつ $P_n=A_2$ となる確率を求めよ．

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のなかで $P_k=A_2$ となる k が 2 つ以下となる確率を求めよ．

(24 一橋大 後 経済 3)

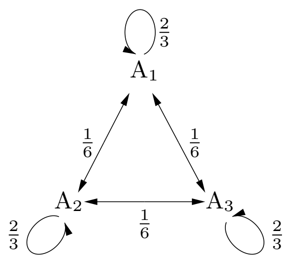
【答】

(1) $\dfrac{5^{n-1}}{6^n}$

(2) $\dfrac{(2n^2+90n+712)5^{n-4}}{6^n}$

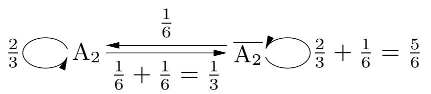
【解答】

P が点 A_t $(t=1,\ 2,\ 3)$ にあるとき，条件より P の移動の確率は右図となる．



(1) さいころを k 回目に投げた直後の P の位置 P_k が $P_k=A_2$ とならないこと，すなわち $P_k=(A_1$ または $A_3)$ となることを $P_k=\overline{A_2}$ と表すことにする．

このとき P の A_2, $\overline{A_2}$ 間の移動の確率は下図となる．



よって，初め点 A_1 にある P が $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のいずれに対しても $P_k=A_2$ とはならず，かつ $P_n=A_2$ となる確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{5^{n-1}}{6^n}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のなかで $P_k=A_2$ となる k が 2 つ以下となるのは k の個数が 0, 1, 2 のいずれかのときであり，これらは排反である．それぞれの確率を p_0, p_1, p_2 とおく．

(i) k の個数が 0 のとき

P は $\overline{A_2}$ にとどまることを n 回続けるから

$$p_0=\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

である．

(ii) k の個数が 1 のとき

P が l 回後 $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ に $P_l=A_2$ となるとき

$$A_1 \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \overset{1\text{ 回後}}{\overline{A_2}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \cdots \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \overset{l-1\text{ 回後}}{\overline{A_2}} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \overset{l\text{ 回後}}{A_2} \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \overset{l+1\text{ 回後}}{\overline{A_2}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \cdots \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \overset{n\text{ 回後}}{\overline{A_2}}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{l-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-(l+1)}=\frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\ (l\text{ に関係なく一定})$$

P が $l=n$ 回後に $P_n=A_2$ となるとき

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$$

であるから

$$\begin{aligned}p_1&=(n-1)\frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\\&=\left(\frac{n-1}{18}\cdot\frac{36}{25}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\\&=\frac{2n+3}{25}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\end{aligned}$$

である．

(iii) k の個数が 2 のとき

P が $l,\ m$ 回後 $(1\leqq l<m\leqq n)$ に A_2 に移動する様子は，A_2，$\overline{A_2}$ の並び方で A_2，$\overline{A_2}$ が隣り合うか否か $(m=l+1,\ m\geqq l+2)$，A_2 が n 回後であるか否か $(m=n,\ m\leqq n-1)$ で場合分けすると次の 4 通りがある．

(a) $\begin{cases}1\leqq l\leqq n-3\\ l+2\leqq m\leqq n-1\end{cases}$ のとき

$$A_1\to\overline{A_2}\to\cdots\to\overline{A_2}\underset{\frac{1}{6}}{\to}\overset{l\text{ 回後}}{A_2}\underset{\frac{1}{3}}{\to}\overline{A_2}\to\cdots\to\overline{A_2}\underset{\frac{1}{6}}{\to}\overset{m\text{ 回後}}{A_2}\underset{\frac{1}{3}}{\to}\overline{A_2}\to\cdots\to\overset{n\text{ 回後}}{\overline{A_2}}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{l-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{m-l-2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-m-1}=\frac{1}{18^2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4}$$

組 $(l,\ m)$ のとり方は

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n-3}\{(n-1)-(l+1)\}=\sum_{l=1}^{n-3}(n-l-2)\\&=\frac{(n-3)\{(n-3)+1\}}{2}=\frac{(n-3)(n-2)}{2}\ (\text{通り})\end{aligned}$$

ある．

(b) $\begin{cases}1\leqq l\leqq n-2\\ m=n\end{cases}$ のとき

$$A_1\to\overline{A_2}\to\cdots\to\overline{A_2}\underset{\frac{1}{6}}{\to}\overset{l\text{ 回後}}{A_2}\underset{\frac{1}{3}}{\to}\overline{A_2}\to\cdots\to\overline{A_2}\underset{\frac{1}{6}}{\to}\overset{n\text{ 回後}}{A_2}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{l-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-l-2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3\cdot 6^2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

組 $(l,\ m)=(l,\ n)$ のとり方は

$n-2$ (通り)

ある．

(c) $\begin{cases}1\leqq l\leqq n-2\\ m=l+1\end{cases}$ のとき

$$A_1\to\overline{A_2}\to\cdots\to\overline{A_2}\underset{\frac{1}{6}}{\to}\overset{l\text{ 回後}}{A_2}\underset{\frac{2}{3}}{\to}\overset{l+1\text{ 回後}}{A_2}\underset{\frac{1}{3}}{\to}\overline{A_2}\to\cdots\to\overset{n\text{ 回後}}{\overline{A_2}}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{l-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-l-2}=\frac{1}{27}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

組 $(l,\ m)$ のとり方は

$n-2$ (通り)

ある．

(d) $\begin{cases} l = n-1 \\ m = n \end{cases}$ のとき

$$\mathrm{A}_1 \to \overline{\mathrm{A}_2} \to \cdots \to \overline{\mathrm{A}_2} \underset{\frac{1}{6}}{\to} \overset{n-1\text{ 回後}}{\mathrm{A}_2} \underset{\frac{2}{3}}{\to} \overset{n\text{ 回後}}{\mathrm{A}_2}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

組 $(l,\ m)$ のとり方は $(l,\ m) = (n-1, n)$ の 1 通りである.

(a)〜(d) は排反であるから,

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{(n-3)(n-2)}{2 \cdot 18^2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} + \frac{n-2}{3 \cdot 6^2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{n-2}{27}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{1}{9}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \left\{\frac{(n-3)(n-2)}{2 \cdot 18^2} \cdot \frac{6^4}{5^4} + \frac{n-2}{3 \cdot 6^2} \cdot \frac{6^3}{5^3} + \frac{n-2}{27} \cdot \frac{6^3}{5^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{6^2}{5^2}\right\}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \left\{\frac{2(n-3)(n-2)}{5^4} + \frac{2(n-2)}{5^3} + \frac{8(n-2)}{5^3} + \frac{4}{5^2}\right\}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \frac{2(n^2-5n+6)+50(n-2)+100}{5^4}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \frac{2n^2+40n+12}{5^4}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{aligned}$$

以上より求める確率は

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{2n+3}{25}\left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{2n^2+40n+12}{5^4}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \frac{5^4 + 5^2(2n+3) + (2n^2+40n+12)}{5^4}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \frac{2n^2+90n+712}{5^4}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \boldsymbol{\frac{(2n^2+90n+712)5^{n-4}}{6^n}} \end{aligned}$$

……(答)

である.