箱の中にカードが 2 枚以上入っており，それぞれのカードにはアルファベットが 1 文字だけ書かれている．この箱の中からカードを 1 枚取り出し，書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返し行う．

(1) 箱の中に $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 2 枚入っている場合を考える．

以下では，2 以上の自然数 n に対し，n 回の試行で $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ がそろっているとは，n 回の試行で $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出されることを意味する．

(i) 2 回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(ii) 3 回の試行で A，B がそろっている確率を求める．

例えば，3 回の試行のうち $\boxed{\mathrm{A}}$ を 1 回，$\boxed{\mathrm{B}}$ を 2 回取り出す取り出し方は 3 通りあり，それらをすべて挙げると次のようになる．

1 回目	2 回目	3 回目
$\boxed{\mathrm{A}}$	$\boxed{\mathrm{B}}$	$\boxed{\mathrm{B}}$
$\boxed{\mathrm{B}}$	$\boxed{\mathrm{A}}$	$\boxed{\mathrm{B}}$
$\boxed{\mathrm{B}}$	$\boxed{\mathrm{B}}$	$\boxed{\mathrm{A}}$

このように考えることにより，3 回の試行で A，B がそろっている取り出し方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りあることがわかる．よって，3 回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2^3}$ である．

(iii) 4 回の試行で A，B がそろっている取り出し方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りある．よって，4 回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(2) 箱の中に $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 3 枚入っている場合を考える．

以下では，3 以上の自然数 n に対し，n 回目の試行で初めて A，B，C がそろうとは，n 回の試行で $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する．

(i) 3 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある．よって，3 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{3^3}$ である．

(ii) 4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率を求める．

4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は，(1) の (ii) を振り返ることにより，3 × $\boxed{\text{ウ}}$ 通りあることがわかる．よって，4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

(iii) 5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は $\boxed{\text{サシ}}$ 通りある．よって，5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{3^5}$ である．

(3) 箱の中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 4 枚入っている場合を考える．

以下では，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろうとは，6 回の試行で $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$ のうちいずれか 1 枚が 6 回目の試行で初めて取り出されることを意味する．

また，3 以上 5 以下の自然数 n に対し，6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろうとは，6 回の試行のうち 1 回目から n 回目の試行で，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，$\boxed{\text{D}}$ は 1 回も取り出されず，かつ $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する．6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて B，C，D だけがそろうなども同様に定める．

太郎さんと花子さんは，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう確率について考えている．

太郎： 例えば，5 回目までに $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ 6 回目に初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される場合を考えたら計算できそうだね．

花子： それなら，初めて A，B，C だけがそろうのが，3 回目のとき，4 回目のとき，5 回目のときで分けて考えてみてはどうかな．

6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方が $\boxed{\text{ク}}$ 通りであることに注意すると，「6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方は $\boxed{\text{スセ}}$ 通りあることがわかる．

同じように考えると，「6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方は $\boxed{\text{ソタ}}$ 通りあることもわかる．

以上のように考えることにより，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ であることがわかる．

(24 共通テスト 本試験 IA 3)

	ア	イ	ウ	エオ	カ	キ	ク	ケ	コ	サシ	スセ	ソタ	チツ	テトナ
【答】	1	2	6	14	7	8	6	2	9	42	54	54	75	512

【解答】

(1) (i) 2 回の試行で $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ がそろっているのは，$\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ をそれぞれ 1 回ずつ取り出すときであり，順序も考えると $\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{A}}$ の 2 通りの取り出し方がある．

求める確率は

$$\frac{2}{2^2} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) 3 回の試行で $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ がそろっているのは，3 回の試行において

$\boxed{\mathrm{A}}$ を 1 回，$\boxed{\mathrm{B}}$ を 2 回取り出す

$\boxed{\mathrm{A}}$ を 2 回，$\boxed{\mathrm{B}}$ を 1 回取り出す

のいずれかであるから，A，B がそろっている取り出し方の総数は

$${}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 = 3 + 3 = \mathbf{6} \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

あることがわかる．よって，3 回の試行で A，B がそろっている確率は

$$\frac{6}{2^3} = \frac{3}{4}$$

である．

(iii) 4 回の試行で $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ がそろっているのは，4 回の試行のうち

$\boxed{\mathrm{A}}$ を 1 回，$\boxed{\mathrm{B}}$ を 3 回取り出す

$\boxed{\mathrm{A}}$ を 2 回，$\boxed{\mathrm{B}}$ を 2 回取り出す

$\boxed{\mathrm{A}}$ を 3 回，$\boxed{\mathrm{B}}$ を 1 回取り出す

のいずれかであり，A，B がそろっている取り出し方の総数は

$${}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_3 = 4 + \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 = \mathbf{14} \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

あることがわかる．よって，4 回の試行で A，B がそろっている確率は

$$\frac{14}{2^4} = \mathbf{\frac{7}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 場合分けが多くなると，余事象を考えるのも一手である．
  A，B がそろわない取り出し方は，A のみ，B のみの 2 通りがあるから，A，B がそろっている取り出し方の総数は
  $$2^4 - 2 = 16 - 2 = 14 \text{ 通り}$$
  である．

(2) (i) 3 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は，$\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ をそれぞれ 1 回ずつ取り出す取り出し方であるから

$${}_3\mathrm{P}_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{6} \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

あり，3 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は

$$\frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$$

である．

(ii) 4 回目の試行で初めて A，B，C がそろうのは，3 回目までに 2 文字がそろい 4 回目に残りの 1 文字が取り出されるときである．

この取り出し方は，3 回の試行でそろう 2 文字の決め方は ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通りあるから，(1) の (ii) を振り返ることにより

$$3 \times 6 \times 1 = 18 \text{ 通り}$$

あることがわかる．

4 回の試行で初めて A，B，C がそろう確率は

$$\frac{18}{3^4} = \frac{2}{3^2} = \boldsymbol{\frac{2}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) 5 回目の試行で初めて A，B，C がそろうのは，4 目までに 2 文字がそろい 5 回目に残りの 1 文字が取り出されるときである．

この取り出し方は，4 回の試行でそろう 2 文字の決め方は ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通りあるから，(1) の (iii) を振り返ることにより

$$3 \times 14 \times 1 = \mathbf{42} \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

あり，5 回の試行で初めて A，B，C がそろう確率は

$$\frac{42}{3^5} = \frac{14}{3^4} = \frac{14}{81}$$

である．

(3) 「6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\mathrm{D}}$ が取り出される」取り出し方は，(2) の (i) を振り返ることにより

$$6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{54} \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

あることがわかる．

「6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\mathrm{D}}$ が取り出される」取り出し方は，(2) の (ii) を振り返ることにより

$$18 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{54} \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

あることもわかる．

また,「6 回の試行のうち 5 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\mathrm{D}}$ が取り出される」取り出し方は，(2) の (iii) を振り返ることにより

$$42 \cdot 1 = 42 \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

あることもわかる．

よって，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう確率は，6 回目に取り出す文字の決め方が ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 通りあることに注意すると

$$4 \times \left(\frac{54}{4^6} + \frac{54}{4^6} + \frac{42}{4^6} \right) = \frac{27 + 27 + 21}{4^4 \cdot 2} = \boldsymbol{\frac{75}{512}}$$

であることがわかる． ……(答)