以下の問いに答えよ．

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする．正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする．このとき 不等式

$$x+1 > 2\log_t(x+1)$$

を示せ．

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ．

(24 東北大 理 2 文 3)

【答】

(1) 略

(2) $n=2,\ 3,\ 4$

【解答】

(1) $t>1$ および 2 つの条件 (a)(b) のもとでは

$$\begin{aligned}
&(x+1)-2\log_t(x+1)\\
&\geqq 2\log_t x+1-2\log_t(x+1) \quad (\because\ (b))\\
&=1-2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&>1-2\log_t\{1+(\sqrt{t}-1)\} \quad (\because\ t>1,\ (a))\\
&=1-2\log_t\sqrt{t}\\
&=1-2\cdot\frac{1}{2}\\
&=0
\end{aligned}$$

であるから，不等式

$$x+1 > 2\log_t(x+1)$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

(2) $$n \leqq 2\log_2 n \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) の t を $t=2$，x を正の整数 n とおくと

$$\begin{cases}(a)\ n > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1\\ (b)\ n \geqq 2\log_2 n\end{cases} \quad \text{ならば，} \quad n+1>2\log_2(n+1)$$

が成り立つ．すなわち，(a) かつ (b′) $n>2\log_2 n$ を満たす正の整数 n がみつかると，数学的帰納法により n 以上のすべての正の整数について

$$n > 2\log_2 n$$

が成り立つ．このとき，$(*)$ は成り立たない．

$n=1,\ 2,\ \cdots$ として，$(*)$ の成立を確かめ，$(*)$ が成立しないときは条件(a) かつ (b′) を確かめる．

○ $n=1$ のとき

$$（左辺）=1,\quad（右辺）=2\log_2 1=0$$

であるから，$(*)$ は成り立たない．(a) は成り立たない．

○ $n=2$ のとき

$$（左辺）=2,\quad（右辺）=2\log_2 2=2$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

○ $n=3$ のとき

$$（左辺）=3=\log_2 8,\quad（右辺）=2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

○ $n=4$ のとき

$$（左辺）=4=\log_2 16,\quad（右辺）=2\log_2 4=\log_2 4^2=\log_2 16$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

○ $n=5$ のとき

$$（左辺）=5=\log_2 32,\quad（右辺）=2\log_2 5=\log_2 5^2=\log_2 25$$

であるから，$(*)$ は成り立たない．(a)(b′) はともに成り立つ．

よって，5 以上のすべての正の整数について $(**)$ が成り立つので，$(*)$ は成り立たない．

以上より，$(*)$ を満たす正の整数 n のすべては

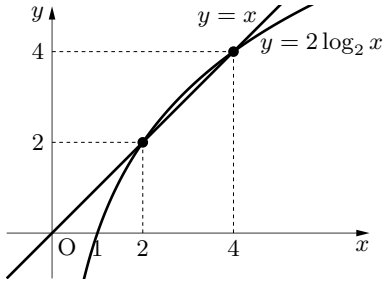
$$\boldsymbol{n=2,\ 3,\ 4} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

● $y=x$，$y=2\log_2 x$ のグラフは右図のようになる．したがって，$x \leqq 2\log_2 x$ を満たす実数 x は

$$2 \leqq x \leqq 4$$

であり，これを満たす正の整数 n は

$$n=2,\ 3,\ 4$$

である．