三角形に関連する量と三角形の合同条件について考察する．

(1) $\triangle$ABC において，BC $=4$ であり，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ であるとする．このとき，$\angle$BAC の大きさについて二つの場合を考えることができ，そのうちの小さい方は $\boxed{\text{テ}}$ であり，大きい方は $\boxed{\text{ト}}$ である．さらに，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ であるとする．このとき，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\boxed{\text{ナ}}$ である．

$\angle\mathrm{BAC}=\boxed{\text{テ}}$ のとき，余弦定理より $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\boxed{\text{ニヌ}}$ なので $(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})^2=\boxed{\text{ネノ}}$ である．よって，$\mathrm{AC}=\boxed{\text{ハ}}-\mathrm{AB}$ より

$$\mathrm{AB}=\frac{\boxed{\text{ヒ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{2}$$

である．

また，$\angle\mathrm{BAC}=\boxed{\text{ト}}$ のとき，同様に考えると $\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{19}\pm\sqrt{7}}{2}$ であることがわかる．

$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ 30°	① 45°	② 60°	③ 90°
④ 120°	⑤ 135°	⑥ 150°	

(2) 次の命題 (a)，(b) の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ホ}}$ である．

(a) 二つの三角形において，一組の辺，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいならば，その二つの三角形は合同である．

(b) 二つの三角形において，一組の角，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいならば，その二つの三角形は合同である．

$\boxed{\text{ホ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	真	真	偽	偽
(b)	真	偽	真	偽

(24 共通テスト 追・再試験 IA1[3] I2[2])

【答】

テ	ト	ナ	ニヌ	ネノ	ハ	ヒ	フヘ	ホ
2	4	3	19	25	5	5	13	2

【解答】

(1) $\triangle$ABC において，BC $=4$ であり，外接円の半径は $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ であるから，正弦定理より

$$\frac{4}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\qquad\therefore\quad\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle$BAC は $\triangle$ABC の内角の一つであり，$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ であるから，$\angle$BAC の大きさは

小さい方　**60°**，　大きい方　**120°**　……(答)

の二つの場合がある．さらに，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ のとき

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\mathbf{3}\qquad\cdots\cdots ①\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ のとき，余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos 60^\circ=4^2$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=16+2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{19}\qquad\cdots\cdots(答)$$

なので

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=19+2\cdot 3=\mathbf{25}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}+\mathrm{AC}=5\ (>0)$$

である．よって，$\mathrm{AC}=\mathbf{5}-\mathrm{AB}$ を ① に代入すると ……(答)

$$\mathrm{AB}(5-\mathrm{AB})=3$$

$$\mathrm{AB}^2-5\mathrm{AB}+3=0$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}=\frac{\mathbf{5\pm\sqrt{13}}}{\mathbf{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

また，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ のとき，同様に考えると

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos 120^\circ=4^2$$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=16+2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=13$$

なので

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=13+2\cdot 3=19$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}+\mathrm{AC}=\sqrt{19}\ (>0)$$

である．よって，$\mathrm{AC}=\sqrt{19}-\mathrm{AB}$ を ① に代入すると

$$\mathrm{AB}(\sqrt{19}-\mathrm{AB})=3$$

$$\mathrm{AB}^2-\sqrt{19}\mathrm{AB}+3=0$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}=\frac{\sqrt{19}\pm\sqrt{7}}{2}$$

であることがわかる．

(2) (a)：偽

(1) の三角形において $\angle\mathrm{BAC}$ は 60° と 120° の 2 通りがある．この角をもつ三角形をそれぞれ $\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ とおく．この二つの三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は，辺 BC，B′C′ の長さが 4，面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径が $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ であるが，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$，$\angle\mathrm{B'A'C'}=120^\circ$ であり合同でない．

(b)：真

二つの三角形 ABC，A′B′C′ について一組の角，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいものとする．等しい一組の角を $\angle\mathrm{BAC}$, $\angle\mathrm{B'A'C'}$ とし，面積を S，外接円の半径を R とおく．

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{B'A'C'}$ に注意すると

$$\begin{cases} S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC} \\[2mm] S=\dfrac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'}\sin\angle\mathrm{B'A'C'} \end{cases}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'}\qquad\cdots\cdots ①$$

正弦定理より

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = 2R \\ \dfrac{\mathrm{B'C'}}{\sin\angle\mathrm{B'A'C'}} = 2R \end{cases} \qquad \therefore \quad \mathrm{BC} = \mathrm{B'C'}$$

であり，辺々2 乗して，余弦定理を用いると

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC} = \mathrm{A'B'}^2 + \mathrm{A'C'}^2 - 2\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'}\cos\angle\mathrm{B'A'C'}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{A'B'}^2 + \mathrm{A'C'}^2 \quad (\because\ \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{B'A'C'}, ①)$$

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = (\mathrm{A'B'}+\mathrm{A'C'})^2 - 2\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AB}+\mathrm{AC} = \mathrm{A'B'}+\mathrm{A'C'} \quad (\because\ ①) \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ② より

$$\begin{cases} \mathrm{AB}+\mathrm{AC} = \mathrm{A'B'}+\mathrm{A'C'} = p \\ \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'} = q \end{cases}$$

とおくと，組 $\{\mathrm{AB},\ \mathrm{AC}\}$，$\{\mathrm{A'B'},\ \mathrm{A'C'}\}$ はともに $t^2-pt+q=0$ の解であり，組 $\{\mathrm{BC},\ \mathrm{AB},\ \mathrm{AC}\}$，$\{\mathrm{B'C'},\ \mathrm{A'B'},\ \mathrm{A'C'}\}$ は一致する．

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は合同である．

以上より，命題 (a)，(b) の真偽の組合せとして正しいものは

(②) ……(答)

である．

- 図形的に考察しておく．

(a) 二つの三角形 ABC，A′B′C′ について一組の辺，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいものとする．

外接円の半径が等しいので $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ はひとつの円に内接するものとしてよく，等しい一組の辺を BC, B′C′ とすると，B と B′，C と C′ は一致するものとしてよい．$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'BC}$ について考える．

さらに，面積が等しいという条件が与えられると，BC を底辺と考えることにより，A，A′ から BC に下した垂線の長さ (高さ h) が決まる．BC と平行で BC との距離が h の直線は 2 本存在する．

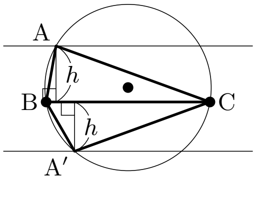
$\mathrm{BC} \neq 2R$ のとき，この 2 本の直線は外接円と

(i) 2 本とも 2 点で交わる

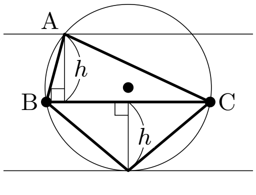
(ii) 1 本は 2 点で交わり，他方は接する

(iii) 1 本は 2 点で交わるまたは接し，他方は円と共有点をもたない

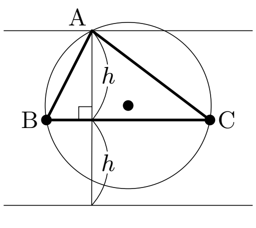
の 3 通りがある．



(i)



(ii)



(iii)

(i) のとき，$\angle\mathrm{BAC}$，$\angle\mathrm{BA'C}$ は鋭角，鈍角があるが，一方を鋭角，他方を鈍角とすると，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は合同ではないので，これが反例となる．

(b) 二つの三角形 ABC，A′B′C′ について一組の角，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいものとする．

外接円の半径が等しいので $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ はひとつの円に内接するものとしてよい．等しい一組の角を $\angle\mathrm{BAC}$, $\angle\mathrm{B'A'C'}$ とすると，弧 BC，B′C′ 長さは等しいので B と B′，C と C′ は一致するものとしてよい．

さらに，面積が等しいという条件が与えられると，BC を底辺と考えることにより，A から BC に下した垂線の長さと A' から BC に下した垂線の長さは同じ値であり，A，A' の位置は 2 通りまたは 1 通り ($\angle\mathrm{BAC}$， $\angle\mathrm{B}'\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ が直角のとき，A と A' は一致するので 1 通りである) に決まる．

A，A' の位置が 1 通りある場合は，A' が A と一致し $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A}'\mathrm{BC}$ は合同である．

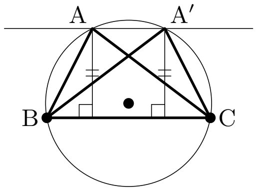
A，A' の位置が 2 通りある場合を考える．

A' が A と一致するとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A}'\mathrm{BC}$ は一致し，合同である．

A' が A が異なるとき，右図のように $\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{A}'\mathrm{BC}$ をとると

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{A}'\mathrm{BC} &= \angle\mathrm{A}'\mathrm{AC} \quad (\because \text{ 円周角の定理}) \\ &= \angle\mathrm{ACB} \quad (\because \ \mathrm{AA}' \,/\!/\, \mathrm{BC})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{A}'\mathrm{CB} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{BA}'\mathrm{C} + \angle\mathrm{A}'\mathrm{BC}) \\ &= 180^\circ - (\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{ACB}) \\ &= \angle\mathrm{ABC}\end{aligned}$$



であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A}'\mathrm{BC}$ は合同である．

以上より，二つの三角形において，一組の角，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいならば，その二つの三角形は合同である．

以上より，命題 (a)，(b) の真偽の組合せとして正しいものは (2) である．