a を $0 < a < 1$ を満たす定数とする．θ の関数

$$f(\theta) = 2\cos 2\theta - 6a\cos\theta - 3a + 5$$

を考える．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1) $x = \cos\theta$ とおく．$f(\theta)$ を x を用いて表せ．

(2) $f(\theta)$ の最大値，最小値，およびそのときの $\cos\theta$ の値を a を用いて表せ．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ におけるすべての θ に対して $f(\theta) > 0$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

(4) $f(\theta) = 0$ を満たす θ の個数を，a の値により場合分けして求めよ．

(24 東京海洋大 海洋工 3)

【答】

(1) $f(\theta) = 4x^2 - 6ax - 3a + 3$

(2) $\cos\theta = -1$ のとき最大値 $3a+7$，$\cos\theta = \dfrac{3}{4}a$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{4}a^2 - 3a + 3$

(3) $0 < a < \dfrac{2}{3}$

(4)

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{7}{9}$	$\cdots$	(1)
θの個数		0	2	4	3	2	

【解答】

$$f(\theta) = 2\cos 2\theta - 6a\cos\theta - 3a + 5$$

(1) $x = \cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2(2\cos^2\theta - 1) - 6a\cos\theta - 3a + 5 \\ &= 4\cos^2\theta - 6a\cos\theta - 3a + 3 \\ &= \boldsymbol{4x^2 - 6ax - 3a + 3} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $g(x) = 4x^2 - 6ax - 3a + 3$ とおく．

$$g(x) = 4\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 - \frac{9}{4}a^2 - 3a + 3$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より x のとり得る値の範囲は $-1 \leqq x \leqq 1$ である．また，$y = g(x)$ のグラフは下に凸，軸の方程式は $x = \dfrac{3}{4}a$ である．

$0 < a < 1$ より $0 < \dfrac{3}{4}a < \dfrac{3}{4}$ であるから，$g(x)$ は $x = -1$ のとき，すなわち $f(\theta)$ は

$\cos\theta = -1$ のとき，最大値 $3a + 7$ ……(答)

をとり，$g(x)$ は $x = \dfrac{3}{4}a$ のとき，すなわち $f(\theta)$ は

$\cos\theta = \dfrac{3}{4}a$ のとき，最小値 $-\dfrac{9}{4}a^2 - 3a + 3$ ……(答)

をとる．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ におけるすべての θ に対して $f(\theta) > 0$ が成り立つ条件は，$g(x)$ の最小値が正であることである．(2) より

$$\begin{aligned} &-\frac{9}{4}a^2 - 3a + 3 > 0 \\ &3a^2 + 4a - 4 < 0 \\ &(3a-2)(a+2) < 0 \\ \therefore \quad &-2 < a < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

を得る．$0 < a < 1$ とあわせると，求める a の範囲は

$$\boldsymbol{0 < a < \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

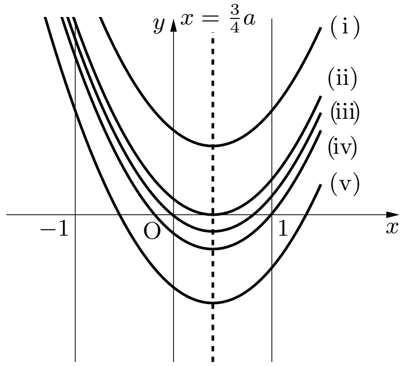
である．

(4) x に対し，$x = \cos\theta$ を満たす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の個数は

$$(*)\begin{cases} -1 < x < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ x = \pm 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ x < -1,\ 1 < x \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

である．

$0 < a < 1$ より，軸 $x = \dfrac{3}{4}a$ の位置が $0 < \dfrac{3}{4}a < \dfrac{3}{4}$ であり，$g(-1) = 3a + 7 > 0$ であることに注意すると，方程式 $g(x) = 0$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における実数解 x の個数は



(i) $g\left(\dfrac{3}{4}a\right) > 0$ すなわち $0 < a < \dfrac{2}{3}$ のとき

x は 0 個である．

(ii) $g\left(\dfrac{3}{4}a\right) = 0$ すなわち $a = \dfrac{2}{3}$ のとき

$-1 < x < 1$ をみたす x が 1 個ある．

(iii) $\begin{cases} g\left(\dfrac{3}{4}a\right) < 0 \\ g(1) = -9a + 7 > 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3} < a \\ a < \dfrac{7}{9} \end{cases}$

すなわち $\dfrac{2}{3} < a < \dfrac{7}{9}$ のとき

$-1 < x < 1$ をみたす x が 2 個ある．

(iv) $g(1) = -9a + 7 = 0$ すなわち $a = \dfrac{7}{9}$ のとき

$-1 < x < 1$ をみたす x が 1 個と $x = 1$ の 2 個がある．

(v) $g(1) = -9a + 7 < 0$ すなわち $\dfrac{7}{9} < a < 1$ のとき

$-1 < x < 1$ をみたす x が 1 個ある．

以上より，$(*)$ もあわせると $f(\theta) = 0$ を満たす θ の個数は

$\boldsymbol{a}$	**(0)**	$\cdots$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{\frac{7}{9}}$	$\cdots$	**(1)**
$\boldsymbol{\theta}$の個数		**0**	**2**	**4**	**3**	**2**	

$\cdots\cdots$(答)

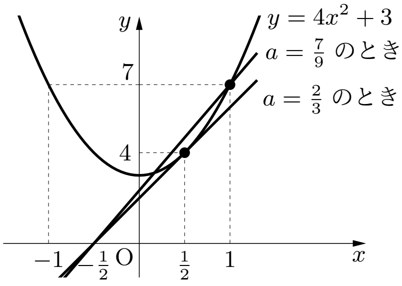
である．

- 定数 a を分離して

$$g(x) = 0 \iff 4x^2 + 3 = 6a\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

と変形すると，$g(x) = 0$ を満たす実数解 x は曲線 $y = 4x^2 + 3$ と定点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る傾き $6a$ の直線との共有点の x 座標である．

曲線 $y=4x^2+3$ と直線 $y=6a(x+\frac{1}{2})$ が接するのは，$g(x)=0$ が重解をもつときである．判別式を考えて



$$9a^2-4(-3a+3)=0$$
$$3a^2+4a-4=0$$
$$(3a-2)(a+2)=0$$
$$a=\frac{2}{3} \quad (\because\ 0<a<1)$$

接点の x 座標は $x=\frac{3}{4}a=\frac{1}{2}$ である．

また，直線 $y=6a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ が点 $(1,\ 7)$ を通るとき

$$7=6a\left(1+\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore \quad a=\frac{7}{9}$$

である．よって，右図となり，解答の結果を得る．