a を正の実数とし，xy 平面上の直線 L_1, L_2, L_3 をそれぞれ

$$L_1 : y = a, \quad L_2 : y = x, \quad L_3 : y = -x$$

とする．また，b を実数とし，円 C を

$$C : x^2 + (y-b)^2 = 1$$

とする．直線 L_1, L_2, L_3 のすべてが円 C と共有点をもち，かつその共有点の総数が 3 となるときの a, b の組を求めよ．

(24 一橋大 後 経済 4)

【答】 $(a,\ b)=(1,\ 1),\ \left(\sqrt{2}\pm 1,\ \sqrt{2}\right)$

【解答】

$$L_1 : y = a\ (a>0), \quad L_2 : y = x, \quad L_3 : y = -x$$

$$C : x^2 + (y-b)^2 = 1$$

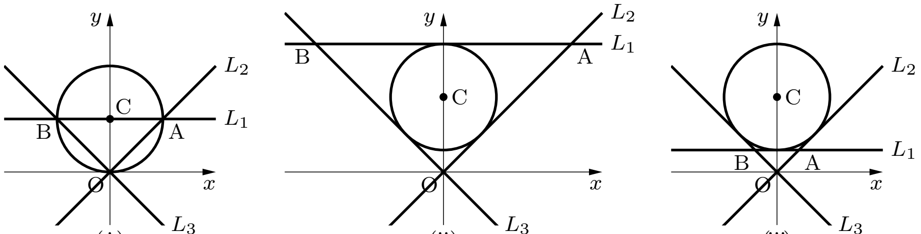
L_2 と L_3，L_1 と L_2，L_1 と L_3 の交点は

$$(0,\ 0), \quad (a,\ a), \quad (-a,\ a)$$

であり，それぞれを O，A，B とおく．直線 L_1, L_2, L_3 のすべてと共有点をもち，共有点の総数が 3 となる円は三角形 OAB の

(i) 外接円 (ii) 内接円 (iii) 辺 AB および OA, OB の延長と接する傍接円

のときである．円 C の中心 $(0,\ b)$ を C とおくとそれぞれは下図となる．



(i) (ii) (iii)

(i) 円 C が △ABC の外接円となるのは，L_2, L_3 が直交することから，AB は円 C の直径となるときである．このとき

$$a = \mathrm{CA} = \mathrm{OC} = b = (\text{半径}) = 1$$

である．

(ii) まず，円 C が L_2，L_3 と接するための b の値を求める．円 C の中心 $(0,\ b)$ は y 軸上にあり，L_2 と L_3 は y 軸に関して対称であるから

$$(\text{中心 } (0,\ b) \text{ と } L_3 \text{との距離}) = (C \text{ の半径})$$

が成り立つ．

$$\frac{|0+b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 1 \qquad \therefore \quad |b| = \sqrt{2}$$

円 C は L_1 とも接するから $b>0$ であり

$$b = \sqrt{2} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

である．

さらに，△ABC の内接円となるためには

$$a = b + (C \text{ の半径}) = \sqrt{2} + 1$$

である．

(iii) 円 C が辺 AB および OA, OB の延長と接する傍接円となるのは，① かつ $a = b - (C$ の半径$)$ となるときであり

$$b = \sqrt{2} - 1$$

である．

以上，(i)，(ii)，(iii) より

$$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 1),\ \left(\sqrt{2} \pm 1,\ \sqrt{2}\right)}$$ ……(答)

である．