t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える．

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ．

(2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ．ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ．

(24 北海道大 理系 1)

【答】

(1) $t = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2n\pi}{3}$ 　(n は整数)

(2) 略

【解答】

(1) 点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ と点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ が一致するような t は

$$\begin{cases} \cos 2t = \sin t \\ \cos t = \sin 2t \end{cases}$$

の解である．これを解くと

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 t = \sin t \\ \cos t = 2\sin t\cos t \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} (2\sin t - 1)(\sin t + 1) = 0 \\ (2\sin t - 1)\cos t = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \sin t = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \sin t = -1 \\ \cos t = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{または} \quad t = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である．これは

$$\boldsymbol{t = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \quad (n \text{ は整数})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

とまとめることができる．

(2) 点 P の軌跡は

$$(*) \begin{cases} x = 2\cos^2 t - 1 \\ y = \cos t \\ 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

を満たす t が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

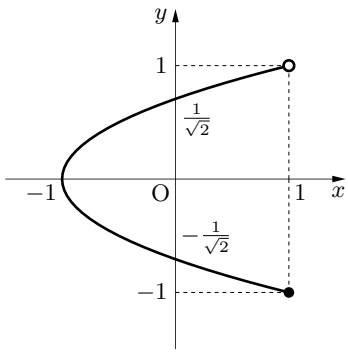
$$(*) \iff \begin{cases} y = \cos t \\ x = 2y^2 - 1 \\ 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

であり，これを満たす t が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合は

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ -1 \leqq y < 1 \end{cases}$$

である．

x 軸との交点の座標は　$(-1,\ 0)$

y 軸との交点の座標は　$\left(0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

であり，点 P の軌跡は右図となる．端点は白丸は除き，黒丸は含む．