xy 平面上に 2 点 A(0, 0) と B(0, 3) がある．AP : BP = 1 : 1 である点 P が描く図形の方程式を求めると $\boxed{\text{ウ}}$ である．また，AQ : BQ = 2 : 1 である点 Q が描く図形の方程式を求めると $\boxed{\text{エ}}$ である．

(24 南山大 理工 1(2))

【答】

ウ	エ
$y=\dfrac{3}{2}$	$x^2+(y-4)^2=4$

【解答】

A(0, 0)，B(0, 3)

P の座標を $(x,\ y)$ とおくと，P は AP : BP = 1 : 1 を満たすから

$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$$
$$x^2+y^2=x^2+(y-3)^2$$
$$0=-6y+9$$
$$\therefore\quad y=\frac{3}{2}$$

これは同値な変形であるから，P の描く図形の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{2}}$$ ……(答)

である．

- AP : BP = 1 : 1 より，P は 2 点 A，B から等距離にあるから，P が描く図形は線分 AB の垂直二等分線である．それは AB の中点 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通り，y 軸に垂直であるから，求める方程式は
$$y=\frac{3}{2}$$
である．

また，Q の座標を $(x,\ y)$ とおくと，AQ : BQ = 2 : 1 を満たすから

$$\mathrm{AQ}=2\mathrm{BQ}$$
$$x^2+y^2=4\{x^2+(y-3)^2\}$$
$$0=3x^2+3y^2-24y+36$$
$$x^2+y^2-8y+12=0$$
$$\therefore\quad x^2+(y-4)^2=4$$

これは同値な変形であるから，Q の描く図形の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+(y-4)^2=4}$$ ……(答)

である．

- 題意の円はアポロニウスの円と呼ばれており，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 (0, 2)，外分する点 (0, 6) を直径の両端とする円である．