$a,\ b,\ d$ を正の実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ d)$ が次の条件をすべて満たすとする．

$$\angle\mathrm{OAD}=15^\circ,\quad \angle\mathrm{OBD}=75^\circ,\quad \mathrm{AB}=6$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ．

(2) $a,\ b,\ d$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) 2 点 O，D を直径の両端とする円を C とする．線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする．また，線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする．このとき，方べきの定理

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AO}^2,\quad \mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BO}^2$$

を示せ．

(4) (3) の点 P，Q に対し，積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}$ の値を求めよ．

(24 東北大 文系 2)

【答】

(1) $\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$

(2) $a=2\sqrt{3}+3,\ b=2\sqrt{3}-3,\ d=\sqrt{3}$

(3) 略

(4) $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}=\dfrac{3}{4}$

【解答】

(1) 加法定理を用いると

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

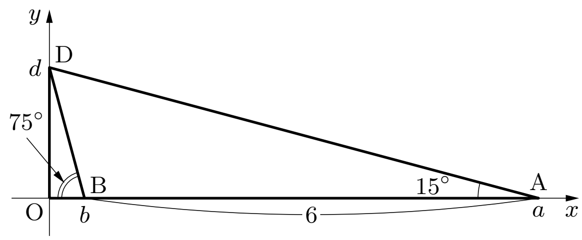
$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\mathbf{2+\sqrt{3}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 直角三角形 OAD において，
$\angle\mathrm{OAD}=15^\circ$ であるから，
$\angle\mathrm{ODA}=75^\circ$ であり

$$\tan\angle\mathrm{ODA}=\frac{a}{d}$$

$$\therefore\ \frac{a}{d}=2+\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots\ ①$$



直角三角形 OBD において，
$\angle\mathrm{OBD}=75^\circ$ であるから

$$\tan\angle\mathrm{OBD}=\frac{d}{b}\qquad\therefore\ \frac{d}{b}=2+\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots\ ②$$

また

$$\mathrm{AB}=6\qquad\therefore\ a-b=6\qquad\cdots\cdots\ ③$$

である．①, ② より

$$a=(2+\sqrt{3})d,\quad b=\frac{d}{2+\sqrt{3}}$$

であり，これらを ③ に代入すると

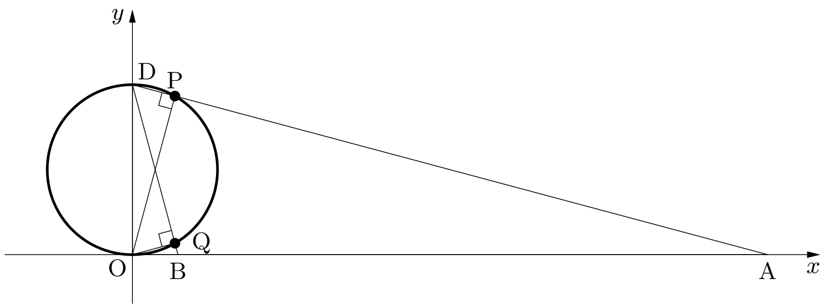
$$(2+\sqrt{3})d - \frac{d}{2+\sqrt{3}} = 6$$
$$\left\{(2+\sqrt{3}) - \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}\right\} d = 6$$
$$2\sqrt{3}d = 6 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{d = \sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり

$$\boldsymbol{a = 2\sqrt{3} + 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$\boldsymbol{b} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = \boldsymbol{2\sqrt{3} - 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 2 点 O，D を直径の両端とする円 C と 2 点 P，Q は下図となる．



△AOD ∽ △APO であり

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AO} = \mathrm{AO} : \mathrm{AP} \qquad \therefore \quad \mathrm{AP} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AO}^2 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

また，△BOD ∽ △BQO であり

$$\mathrm{BD} : \mathrm{BO} = \mathrm{BO} : \mathrm{BQ} \qquad \therefore \quad \mathrm{BQ} \cdot \mathrm{BD} = \mathrm{BO}^2 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

が成り立つ．

(4) (3) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BQ} &= \frac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{AD}} \cdot \frac{\mathrm{BO}^2}{\mathrm{BD}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+d^2}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{b^2+d^2}} \\
&= \frac{(2\sqrt{3}+3)^2}{\sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2+3}} \cdot \frac{(2\sqrt{3}-3)^2}{\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2+3}} \quad (\because\ (2)) \\
&= \frac{21+12\sqrt{3}}{\sqrt{24+12\sqrt{3}}} \cdot \frac{21-12\sqrt{3}}{\sqrt{24-12\sqrt{3}}} \\
&= \frac{9(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{12\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．