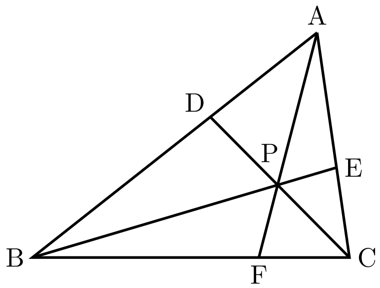
三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=8$，$\mathrm{CA}=5$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とする．また，下の図のように，辺 AB 上に $\mathrm{AD}=3$ となる点 D をおき，辺 CA 上に $\mathrm{CE}=2$ となる点 E をおく．次に線分 BE と線分 CD の交点を P とし，線分 AP の延長と辺 BC との交点を F とする．



(1) AP : PF を求めよ．

(2) 三角形 DEF の面積を求めよ．

(24 青森公立大 4)

【答】

(1) $\mathrm{AP}:\mathrm{PF}=21:10$

(2) $\dfrac{15}{7}\sqrt{3}$

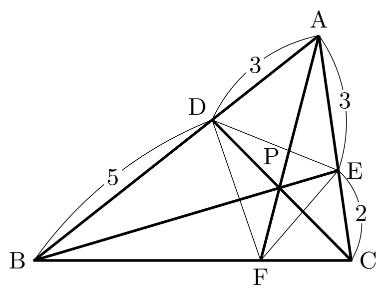
【解答】

(1) △ABC でチェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=1$$

$$\therefore\quad \mathrm{BF}:\mathrm{FC}=5:2$$



である．△AFC と直線 PE でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PF}}\cdot\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PF}}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$$\therefore\quad \mathbf{AP:PF=21:10}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) △ABC の面積を S，△ADE，△BDF，△CEF の面積をそれぞれ S_A，S_B，S_C とおくと

$$(\triangle\mathrm{DEF}\text{ の面積})=S-(S_A+S_B+S_C)$$

である．ここで

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$$

$$S_A=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}S=\frac{9}{5\cdot 8}S$$

$$S_B=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{7}S=\frac{25}{7\cdot 8}S$$

$$S_C=\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{5}S=\frac{4}{5\cdot 7}S$$

であるから

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{DEF}\ の面積) &= \left\{1-\left(\frac{9}{5\cdot 8}+\frac{25}{7\cdot 8}+\frac{4}{5\cdot 7}\right)\right\}S \\ &= \left(1-\frac{63+125+32}{5\cdot 7\cdot 8}\right)10\sqrt{3} \\ &= \frac{280-220}{5\cdot 7\cdot 8}10\sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{15}{7}\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である.