θ を $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．座標平面上の楕円 $E : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ に対して，直線 $\ell : x\sin\theta - y\cos\theta = 0$ と E との 2 つの交点をそれぞれ A，C とし，直線 $m : x\cos\theta + y\sin\theta = 0$ と E との 2 つの交点をそれぞれ B，D とする．ただし，A の x 座標および B の y 座標は共に正とする．

(1) 2 点 A と B の座標を θ の式で表せ．

以下，四角形 ABCD の面積を S とする．

(2) S を $\cos 2\theta$ の式で表せ．

(3) θ が $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S の最大値と最小値を求めよ．また，S が最大値と最小値をとるときの θ の値もそれぞれ答えよ．

(24 札幌医大 2)

【答】

(1) $\mathrm{A}\left(\sqrt{\dfrac{6}{3+2\tan^2\theta}},\ \sqrt{\dfrac{6}{3+2\tan^2\theta}}\tan\theta\right)$，$\mathrm{B}\left(-\sqrt{\dfrac{6}{2+3\tan^2\theta}}\tan\theta,\ \sqrt{\dfrac{6}{2+3\tan^2\theta}}\right)$

(2) $S = \dfrac{24}{\sqrt{25-\cos^2 2\theta}}$

(3) $\theta = 0$ のとき最大値 $2\sqrt{6}$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{24}{5}$

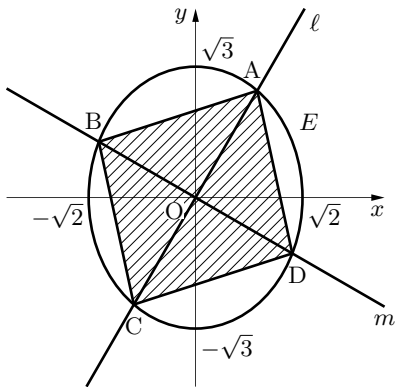
【解答】

$$E : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\ell : x\sin\theta - y\cos\theta = 0$$

$$m : x\cos\theta + y\sin\theta = 0$$

$$\left(\text{ただし } 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$



ℓ と m は直交しており，E, ℓ, m を図示すると右図となり，四角形 ABCD は右図の斜線部分となる．

(1) ℓ の方程式は

$$y = x\tan\theta$$

となるから，E と ℓ の 2 つの交点 A，C の x 座標は

$$3x^2 + 2(x\tan\theta)^2 = 6$$

$$\therefore\quad x = \pm\sqrt{\frac{6}{3+2\tan^2\theta}}$$

A の x 座標は正であるから，A の座標は

$$\mathbf{A}\left(\sqrt{\frac{6}{3+2\tan^2\theta}},\ \sqrt{\frac{6}{3+2\tan^2\theta}}\tan\theta\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

m の方程式は

$$x = -y\tan\theta$$

となるから，E と m の 2 つの交点 B，D の x 座標は

$$3(-y\tan\theta)^2+2y^2=6$$

$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{\frac{6}{2+3\tan^2\theta}}$$

B の y 座標は正であるから，B の座標は

$$\mathbf{B}\left(-\sqrt{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2+3\tan^2\theta}}}\,\mathbf{\tan\theta},\ \sqrt{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2+3\tan^2\theta}}}\right)\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) A と C，B と D はともに原点に関して対称であり，$\ell\perp m$ であるから，四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=4\times\triangle\mathrm{OAB}\\
&=4\times\left(\frac{1}{2}\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\right)\\
&=2\times\sqrt{\frac{6}{3+2\tan^2\theta}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\times\sqrt{\frac{6}{2+3\tan^2\theta}}\sqrt{\tan^2\theta+1}\\
&=\frac{12(1+\tan^2\theta)}{\sqrt{(3+2\tan^2\theta)(2+3\tan^2\theta)}}\\
&=\frac{12}{\sqrt{(3\cos^2\theta+2\sin^2\theta)(2\cos^2\theta+3\sin^2\theta)}}\\
&=\frac{12}{\sqrt{(2+\cos^2\theta)(2+\sin^2\theta)}}\qquad(\because\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1)\\
&=\frac{12}{\sqrt{\left(2+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)\left(2+\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)}}\qquad(\because\ \text{半角の公式})\\
&=\frac{24}{\sqrt{(5+\cos2\theta)(5-\cos2\theta)}}\\
&=\mathbf{\frac{24}{\sqrt{25-\cos^2 2\theta}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-1<\cos2\theta\leqq1$ であり，$0\leqq\cos^2 2\theta\leqq1$ である．

よって，S は

$\cos^2 2\theta=1$，すなわち $\boldsymbol{\theta=0}$ **のとき，最大値** $\mathbf{2\sqrt{6}}$ ……(答)

$\cos^2 2\theta=0$，すなわち $\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$ **のとき，最小値** $\mathbf{\frac{24}{5}}$ ……(答)

をとる．