原点を O とする xy 座標平面において，実数 $\beta>1$ と $0<\theta<\pi$ に対し，点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，点 $\mathrm{B}(\beta,\ 0)$ がある．線分 OA の中点 M と，変数 $t<1$ によって与えられる直線 OB 上の点 $\mathrm{N}(t\beta,\ 0)$ に対し，直線 AN と直線 BM の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ をそれぞれ，$\vec{a}$, $\vec{b}$, t を用いて表しなさい．解答欄には答えのみ書きなさい。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t を用いて表しなさい．解答欄には計算過程も書きなさい．

(3) 直線 AB と直線 OP が直交するとき，変数 t を β, θ を用いて表しなさい．

また，そのときの交点を Q とすると，Q が線分 AB の外分点になるための必要条件を β, θ を用いて表しなさい．解答欄には計算過程も書きなさい．

(24 公立千歳科技大 中期 理工 4)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=t\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$

(3) $t=\dfrac{1-\beta\cos\theta}{1-2\beta\cos\theta+\beta^2}$，$\beta\cos\theta>1$

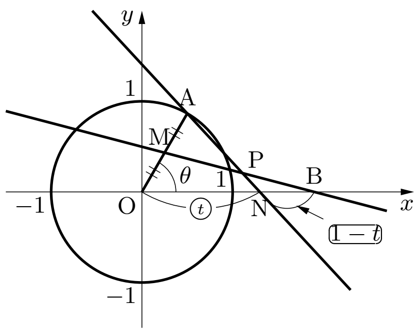
【解答】

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t\vec{b}\ (t<1)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{t\vec{b}-\vec{a}}\qquad\cdots\cdots(答)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．



(2) P は直線 AN 上の点であるから，実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\&=\vec{a}+u(t\vec{b}-\vec{a})\\&=(1-u)\vec{a}+ut\vec{b}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

と表すことができる．また，P は直線 BM 上の点でもあるから，実数 v を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v\overrightarrow{\mathrm{BM}}\\&=\vec{b}+v\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)\\&=\frac{v}{2}\vec{a}+(1-v)\vec{b}\qquad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すこともできる．$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ ($\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立) であるから，① と ② の係数を比較して

$$\begin{cases}1-u=\dfrac{v}{2}\\ ut=1-v\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}2u+v=2\\ tu+v=1\end{cases}$$

$t<1$ より $t\neq 2$ であるから

$$u=\frac{1}{2-t},\quad v=\frac{2t-2}{t-2}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{t-1}{t-2}\vec{a} + \frac{t}{2-t}\vec{b} \\ &= \boldsymbol{\frac{1-t}{2-t}\vec{a} + \frac{t}{2-t}\vec{b}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 直線 AB と直線 OP が直交するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

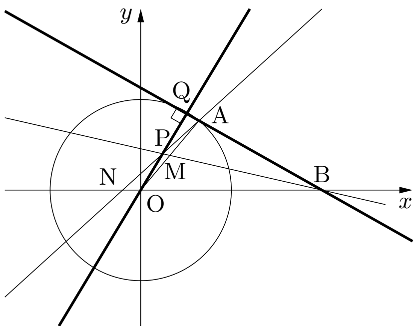
が成り立つ．$\vec{a} = (\cos\theta,\ \sin\theta)\ (0 < \theta < \pi)$，$\vec{b} = (\beta,\ 0)\ (\beta > 1)$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (\vec{b} - \vec{a})\cdot\left(\frac{1-t}{2-t}\vec{a} + \frac{t}{2-t}\vec{b}\right) \quad (\because\ (2)\text{ の結果}) \\ &= \frac{1}{2-t}\left\{-(1-t)|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2\right\} \\ &= \frac{1}{2-t}\left\{-(1-t)1^2 + (1-2t)\beta\cos\theta + t\beta^2\right\} \\ &= \frac{1}{2-t}\left\{(1-2\beta\cos\theta+\beta^2)t - 1 + \beta\cos\theta\right\}\end{aligned}$$

である．$1-2\beta\cos\theta+\beta^2 = (\beta-\cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta = (\beta-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta > 0$ であるから

$$③ \iff \boldsymbol{t = \frac{1-\beta\cos\theta}{1-2\beta\cos\theta+\beta^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



直線 AB と直線 OP の交点 Q は，直線 OP 上にあることから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \frac{k(1-t)}{2-t}\vec{a} + \frac{kt}{2-t}\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができ，さらに Q は直線 AB の点であるから

$$\frac{k(1-t)}{2-t} + \frac{kt}{2-t} = 1$$

$$\therefore\quad \frac{k}{2-t} = 1 \qquad \therefore\quad k = 2-t$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \\ &= \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

である．

$t < 1$ に注意すると，Q が線分 AB の外分点になるための必要条件は $t < 0$ であり

$$\frac{1-\beta\cos\theta}{1-2\beta\cos\theta+\beta^2} < 0$$

である．$1-2\beta\cos\theta+\beta^2 > 0$ であることに注意すると

$$1-\beta\cos\theta < 0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\beta\cos\theta > 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．