三角形 OAB が，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10$ をみたしているとする．三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする．

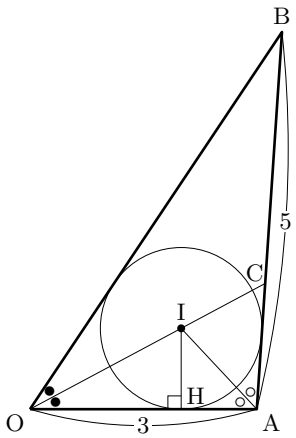
(1) 辺 OB の長さを求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(24 北海道大 理系 4)

【答】

(1) 6
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{HI}} = -\dfrac{5}{21}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

【解答】



(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$ を変形すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 25$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2 \times 10 + 3^2 = 25$$
$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 36$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 直線 OI と辺 AB の交点を C とおく．直線 OC は ∠AOB の二等分線であるから

$$\mathrm{AC} : \mathrm{CB} = \mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 3 : 6 = 1 : 2$$

である．分点公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

である．同じく，AI は ∠OAB の二等分線であり

$$\mathrm{OI} : \mathrm{IC} = \mathrm{OA} : \mathrm{AC} = 3 : \left(\frac{1}{3} \times 5\right) = 9 : 5$$

である．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{9}{9+5}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{9}{14}\,\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} = \boldsymbol{\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) H は I から辺 OA に下した垂線の足であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOI}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OI}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (\overrightarrow{\mathrm{OH}} \text{ は } \overrightarrow{\mathrm{OB}} \text{ の } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ への正射影ベクトルである}) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{7}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{7}\times 3^2 + \frac{3}{14}\times 10\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

である．

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HI}} &= \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \boldsymbol{-\frac{5}{21}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

- OH の長さを x とおくと，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=6$ より右図を得る．$\mathrm{AB}=5$ であるから

  $$(3-x)+(6-x)=5$$
  $$\therefore\quad x=2$$

  したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である．

- $\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} - k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (k は実数) とおき

  $$\overrightarrow{\mathrm{HI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

  より k の値 $\left(k=\frac{2}{3}\right)$ を求めてもよい．