

座標平面上の点 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ が

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = (1, 2^n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すなわち

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (1, 2), \overrightarrow{P_2 P_3} = (1, 4), \overrightarrow{P_3 P_4} = (1, 8), \dots$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{P_1 P_3}$ および $\overrightarrow{P_1 P_4}$ を成分表示せよ。また、 $n = 2, 3, 4, \dots$ とするとき、 $\overrightarrow{P_1 P_n}$ を n の式で成分表示せよ。

(2) $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ とするとき、

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

が成り立つことを示せ。

(3) $n = 2, 3, 4, \dots$ とするとき、 P_1, P_n, P_{n+1} を頂点とする三角形の面積 S_n を n の式で表せ。

(4) $n = 3, 4, 5, \dots$ とするとき、 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ を頂点とする n 角形の面積 T_n を n の式で表せ。

(24 宇都宮大 データ経営(理)・地域デ・工・農 2)

【答】

(1) $\overrightarrow{P_1 P_3} = (2, 6)$, $\overrightarrow{P_1 P_4} = (3, 14)$, $\overrightarrow{P_1 P_n} = (n-1, 2^n - 2)$

(2) 略

(3) $S_n = (n-2)2^{n-1} + 1$

(4) $T_n = (n-4)2^{n-1} + n + 2$

【解答】

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = (1, 2^n) \quad (n \geq 1)$$

(1) 順に

$$\overrightarrow{P_1 P_3} = \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} = (1, 2) + (1, 4) = \mathbf{(2, 6)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{P_1 P_4} = \overrightarrow{P_1 P_3} + \overrightarrow{P_3 P_4} = (2, 6) + (1, 8) = \mathbf{(3, 14)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。同ようにして

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_{n+1}} &= \overrightarrow{P_1 P_n} + \overrightarrow{P_n P_{n+1}} \\ \therefore \overrightarrow{P_1 P_{n+1}} &= \overrightarrow{P_1 P_n} + (1, 2^n) \end{aligned}$$

であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_n} &= \overrightarrow{P_1 P_1} + \sum_{k=1}^{n-1} (1, 2^k) \\ &= (0, 0) + \left(n-1, \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} \right) \\ &= \mathbf{(n-1, 2^n - 2)} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である。

(2) $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\begin{aligned}
 & |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
 &= (a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2) - (a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2) \\
 &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2
 \end{aligned}$$

が成り立つ.

……(証明終わり)

(3) (1) より

$$\overrightarrow{P_1 P_n} = (n-1, 2^n - 2),$$

$$\overrightarrow{P_1 P_{n+1}} = (n, 2^{n+1} - 2)$$

であり, 三角形 $\triangle P_1 P_n P_{n+1}$ の面積 S_n は

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_1 P_n}| |\overrightarrow{P_1 P_{n+1}}| \sin \angle P_n P_1 P_{n+1} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{P_1 P_n}|^2 |\overrightarrow{P_1 P_{n+1}}|^2 (1 - \cos^2 \angle P_n P_1 P_{n+1})} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{P_1 P_n}|^2 |\overrightarrow{P_1 P_{n+1}}|^2 - (\overrightarrow{P_1 P_n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_{n+1}})^2} \\
 &= \frac{1}{2} |(n-1)(2^{n+1} - 2) - (2^n - 2)n| \quad (\because (2)) \\
 &= \frac{1}{2} |(2n - 2 - n)2^n - 2n + 2 + 2n| \\
 &= (n-2)2^{n-1} + 1
 \end{aligned}$$

……(答)

である.

(4) $n \geq 3$ のとき, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ を頂点とする n 角形を $\triangle P_1 P_2 P_3, \triangle P_1 P_3 P_4, \dots, \triangle P_1 P_{n-1} P_n$ として $n-2$ 個の三角形に分割する. n 角形 $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ の面積 T_n は

$$\begin{aligned}
 T_n &= S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} \\
 &= \sum_{k=2}^{n-1} \{(k-2)2^{k-1} + 1\} \\
 &= \sum_{k=2}^{n-1} \{(k-2)2^{k-1}\} + (n-2)
 \end{aligned}$$

ここで, $U_n = \sum_{k=2}^{n-1} \{(k-2)2^{k-1}\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
 U_n &= 0 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (n-3) \times 2^{n-2} \\
 2U_n &= 1 \times 2^3 + \dots + (n-4) \times 2^{n-2} + (n-3) \times 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

辺々ひくと

$$\begin{aligned}
 -U_n &= 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} - (n-3)2^{n-1} \\
 &= 2^2 \frac{2^{n-3} - 1}{2 - 1} - (n-3)2^{n-1} \\
 &= 2^{n-1} - 4 - (n-3)2^{n-1} \\
 &= (4-n)2^{n-1} - 4 \\
 \therefore U_n &= (n-4)2^{n-1} + 4
 \end{aligned}$$

である.

よって

$$T_n = U_n + (n-2) = (n-4)2^{n-1} + n + 2$$

……(答)

である.