ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は $|\vec{a}+2\vec{b}|=6$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=2$ をみたし，また，$\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ のなす角は 120° であるとする．次の問いに答えよ．

(1) 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさ，および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) $|t\vec{a}+2\vec{b}|$ の値が最小となるような実数 t の値と，その最小値を求めよ．

(24 公立小松大 2)

【答】

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{7}$, $|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

(2) $t=-\dfrac{8}{7}$ のとき，最小値 $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

【解答】

$$\begin{cases} |\vec{a}+2\vec{b}|=6 & \cdots\cdots ① \\ |\vec{a}-2\vec{b}|=2 & \cdots\cdots ② \\ (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=6\times 2\cos 120^\circ & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

(1) 「①かつ②かつ③」$\cdots\cdots$ $(*)$ を整理する．

$$(*) \iff \begin{cases} |\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=36 \\ |\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4 \\ |\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2=-6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8\vec{a}\cdot\vec{b}=32 \\ 2|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2=40 \\ |\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2=-6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=4 \\ |\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=20 \\ |\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2=-6 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=4,\quad |\vec{a}|^2=7,\quad |\vec{b}|^2=\frac{13}{4}$$

よって

$$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{7},\quad |\vec{b}|=\frac{\sqrt{13}}{2},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $|t\vec{a}+2\vec{b}|$ が最小となるときと $|t\vec{a}+2\vec{b}|^2$ が最小となるときは一致する．

$$\begin{aligned} |t\vec{a}+2\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2t^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}\,t+4|\vec{b}|^2 \\ &= 7t^2+16t+13 \\ &= 7\left(t+\frac{8}{7}\right)^2+\frac{27}{7} \end{aligned}$$

であり，$|t\vec{a}+2\vec{b}|$ は

$$\boldsymbol{t=-\frac{8}{7}} \ \textbf{のとき，最小値}\ \boldsymbol{\frac{3\sqrt{21}}{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる．