$\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とおく．$\cos\theta$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) (1) の結果を利用して，原点 O と A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ を頂点とする $\triangle$OAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

と表されることを証明せよ．

(24 東京海洋大 生命・資源 3)

【答】

(1) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

(2) 略

【解答】

(1) $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ であるとき

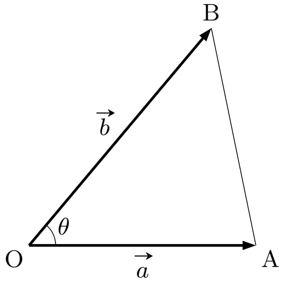
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

であり，$|\vec{a}| \fallingdotseq 0$，$|\vec{b}| \fallingdotseq 0$ であるから

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $\triangle$OAB の面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}} \quad (\because\ (1)) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \end{aligned}$$

である．ここで，$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ であるから

$$\begin{aligned} &|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \\ &= ({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2 \\ &= {a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2-({a_1}^2{b_1}^2-2a_1a_2b_1b_2-{a_2}^2{b_2}^2) \\ &= {a_1}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2+{a_2}^2{b_1}^2 \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} = \frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

である． $\cdots\cdots$ (証明終わり)