$\mathrm{OA}=6,\ \mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ があり，その外接円の中心を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．ここで $p,\ q$ は実数である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{シ}$ である．

(2) 辺 OA の中点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boxed{ス}$ であるから，$p,\ q$ は
$\boxed{セ}p+q=\boxed{ソ}$ を満たす．

(3) 辺 OB の中点を E とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\boxed{タ}$ であるから，$p,\ q$ は
$\boxed{チ}p+2q=\boxed{ツ}$ を満たす．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

(24 金沢工大 A(1 日目) 3)

【答】

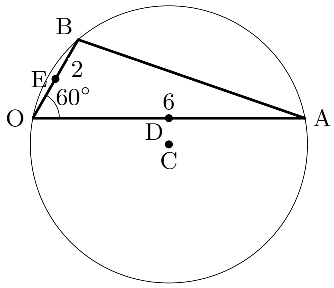
シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
6	0	6	3	0	3	1	5	9	1	3

【解答】

(1) $\mathrm{OA}=6,\ \mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}\\&=6\times2\times\cos60^\circ\\&=\mathbf{6}\end{aligned}$$
……(答)

である．



(2) C は三角形 OAB の外心であるから，線分 OA の垂直二等分線上の点である．また，D は線分 OA の中点であるから，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{DC}$ である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\mathbf{0}$$
……(答)

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)=0$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

$$6^2p+6q=\frac{6^2}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{6}p+q=\mathbf{3}\quad\cdots\cdots ①$$
……(答)

である．

(3) E は OB の中点であり，C は線分 OB の垂直二等分線上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\mathbf{0}$$
……(答)

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$$

$$6p+2^2q=\frac{2^2}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{3}p+2q=\mathbf{1}\quad\cdots\cdots ②$$
……(答)

である．

(4) ①, ② を連立して解くと

$$p = \frac{5}{9},\ q = -\frac{1}{3}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ ……(答)

である.