実数a, bは$-1<a<1$, $-1<b<1$を満たす．座標空間内に4点A$(a,\ -1,\ -1)$，B$(-1,\ b,\ -1)$，C$(-a,\ 1,\ 1)$，D$(1,\ -b,\ 1)$ をとる．

(1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき，aとbの関係を表す等式を求めよ．

(2) a, bが(1)の等式を満たすとき，A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ．

(24 一橋大 4)

【答】

(1) $a+b=1$

(2) $\dfrac{9}{2}$

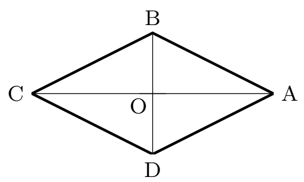
【解答】

$$\mathrm{A}(a,\ -1,\ -1),\ \mathrm{B}(-1,\ b,\ -1),\ \mathrm{C}(-a,\ 1,\ 1),\ \mathrm{D}(1,\ -b,\ 1)$$

$$-1<a<1,\ -1<b<1$$

(1) ひし形は4辺の長さが等しい四角形であり，これは対角線が直交する四角形でもある．

A と C，B と D はそれぞれ原点 O に関して対称であるから，A, B, C, D がひし形の頂点となる条件は



$$\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}\iff\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$\therefore\quad -a-b+1=0$$

よって，求めるaとbの関係式は

$$\boldsymbol{a+b=1}\qquad\cdots\cdots ①\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ひし形 ABCD の面積をSとおくと

$$\begin{aligned}S&=4\times\triangle\mathrm{OAB}=2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\\&=2\sqrt{a^2+1+1}\sqrt{1+b^2+1}\\&=2\sqrt{(a^2+2)(b^2+2)}\\&=2\sqrt{a^2b^2+2(a^2+b^2)+4}\\&=2\sqrt{a^2b^2+2(a+b)^2-4ab+4}\\&=2\sqrt{a^2b^2-4ab+6}\quad(\because\ ①)\\&=2\sqrt{(ab-2)^2+2}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases}a+b=1\\-1<a<1\\-1<b<1\end{cases}\iff\begin{cases}b=1-a\\-1<a<1\\-1<1-a<1\end{cases}\iff\begin{cases}b=1-a\\-1<a<1\\0<a<2\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}b=1-a\\0<a<1\end{cases}$$

であり

$$ab=a(1-a)=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad 0<ab\leqq\frac{1}{4}$$

である．等号は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ．

よって，S は $ab=\dfrac{1}{4}$ のとき

$$\text{最小値 } 2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-2\right)^2+2}=2\sqrt{\frac{81}{16}}=\mathbf{\frac{9}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- $\begin{cases} a+b=1 \\ -1<a<1 \\ -1<b<1 \end{cases}$ より a，b は $t^2-t+ab=0$ の $-1<t<1$ における解である．これを満たす a，b の条件は，軸 $t=\dfrac{1}{2}$ は $-1<t<1$ を満たすから

$$\begin{cases} \text{判別式} : (-1)^2-4ab \geqq 0 \\ \text{端点の符号} : (-1)^2-(-1)+ab>0 \text{ かつ } 1^2-1+ab>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab \geqq \dfrac{1}{4} \\ \text{端点の符号} : 2+ab>0 \text{ かつ } ab>0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad 0<ab \leqq \frac{1}{4}$$

- $\begin{cases} a+b=1 \\ -1<a<1 \\ -1<b<1 \end{cases}$ から $0<a<1$ が得られる．a，b について対称であるから $0<b<1$ でもあり，相加平均・相乗平均の関係を用いることができる．

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad 0<ab \leqq \frac{1}{4}$$

である．等号は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ．

- $\begin{cases} b=1-a \\ 0<a<1 \end{cases}$ より

$$\begin{aligned} S &= 2\sqrt{(a^2+2)(b^2+2)} \\ &= 2\sqrt{(a^2+2)\{(1-a)^2+2\}} \\ &= 2\sqrt{(a^2+2)(a^2-2a+3)} \\ &= 2\sqrt{a^4-2a^3+5a^2-4a+6} \end{aligned}$$

であり，$f(a)=a^4-2a^3+5a^2-4a+6$ とおき，$0<a<1$ における $f(a)$ の最小値を微分を用いて求めてもよい．