四面体 OABC が次を満たすとする．

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1,\quad \angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{ACB},\quad \angle\mathrm{AOB}=90^\circ$$

このとき，四面体 OABC の体積を求めよ．

(24 京都大 文系 1)

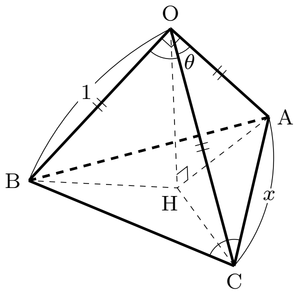
---

【答】 $\dfrac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

---

【解答】

$$\begin{cases}\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1 & \cdots\cdots ① \\ \angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{ACB} & \cdots\cdots ② \\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ & \cdots\cdots ③\end{cases}$$




CA $= x$，$\angle\mathrm{COA}=\theta$ とおき，△COA で余弦定理を用いると

$$x^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cos\theta$$

$$\therefore\quad x^2=2(1-\cos\theta)\qquad\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

①, ② より △BOC ≡ △COA であり，BC $= x$ である．①, ③ より，△AOB は直角二等辺三角形であり，AB $=\sqrt{2}$ である．△ABC で余弦定理を用いると

$$(\sqrt{2})^2=x^2+x^2-2x^2\cos\theta$$

$$\therefore\quad 1=x^2(1-\cos\theta)\qquad\cdots\cdots ②$$

①かつ②を解くと

$$x^4=2,\quad 1-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad x=\sqrt[4]{2},\quad \cos\theta=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}x^2\sin\theta=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^2\sqrt{\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$$

である．

つぎに O から平面 ABC に下した垂線の足を H とおく．① より H は △ABC の外心である．△ABC で正弦定理を用いると

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=2\mathrm{CH}\qquad\therefore\quad \mathrm{CH}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OH}=\sqrt{1^2-\mathrm{CH}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1}}$$

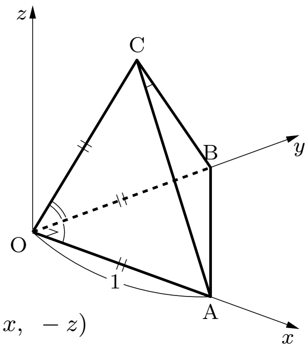
である．よって四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

- ①, ③ より，O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0) となる座標空間をとることができる．




　①, ② より $\triangle\mathrm{BOC} \equiv \triangle\mathrm{COA}$ であり，$\mathrm{CA} = \mathrm{CB}$ が成り立つから，C は線分 AB の垂直二等分面上にある．したがって，C の座標を

$$\mathrm{C}(x,\ x,\ z)$$

とおくことができ，$z$ の符号は $z > 0$ としてよい．

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1 \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x,\ x,\ z) \cdot (1,\ 0,\ 0) \\ \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (1-x,\ -x,\ -z) \cdot (-x,\ 1-x,\ -z) \end{cases}$$

$\angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{COB} = \angle\mathrm{ACB} = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ とおくと

$$\begin{cases} x^2 + x^2 + z^2 = 1 \\ 1 \times 1 \cos\theta = x \\ \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \cos\theta} \times \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \cos\theta} \cos\theta \\ \qquad = -(1-x)x - x(1-x) + z^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ \cos\theta = x \\ 2(1-x)x = -2x(1-x) + z^2 \end{cases}$$

第 1 式，第 3 式より

$$2x^2 + 4x(1-x) = 1$$

$$-2x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$x = \cos\theta\ (0 < \theta < \pi)$ より，$-1 < x < 1$ であるから

$$x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad z = \sqrt{4 \times \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{(2-\sqrt{2})\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$$

である．よって，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) \times \sqrt{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2} - 2}$$

である．