

座標空間の4点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 線分 OA の中点を P , 線分 AB の中点を Q とする. 実数 x, y に対して, 直線 OC 上の点 X と, 直線 BC 上の点 Y を次のように定める.

$$\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BY} = y\overrightarrow{BC}$$

このとき, 直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ.

(24 京大 理系 3)

【答】 $x \neq y$

【解答】

直線 QY と直線 PX がねじれの位置にある

\iff 2直線 QY, PX は共有点をもたず, かつ平行でない

\iff 4点 P, Q, X, Y は同一平面上にない $\dots\dots (*)$

である.

まずは, $(*)$ の否定「4点 P, Q, X, Y が同一平面上にある」 $\dots\dots (**)$ ための x, y に関する必要十分条件を求める.

$(**) \iff \overrightarrow{PQ} = s\overrightarrow{PX} + t\overrightarrow{PY} \dots\dots \textcircled{1}$ を満たす実数 s, t 存在する

である. ここで, P は線分 OA の中点, Q は線分 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

X は直線 OC 上の点であり, $\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OC}$ (x は実数) を満たすから

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

Y は直線 BC 上の点であり, $\overrightarrow{BY} = y\overrightarrow{BC}$ (y は実数) を満たすから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PY} &= \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OP} = \{\overrightarrow{OB} + y(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})\} - \overrightarrow{OP} \\ &= y\overrightarrow{OC} + (1-y)\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

である. したがって, $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} &= s\left(x\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + t\left\{y\overrightarrow{OC} + (1-y)\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right\} \\ &= -\frac{s+t}{2}\overrightarrow{OA} + t(1-y)\overrightarrow{OB} + (sx+ty)\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となる. 4点 O, A, B, C は同一平面上にないから $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は1次独立であり

$$\begin{cases} s+t=0 \\ t(1-y)=\frac{1}{2} \\ sx+ty=0 \end{cases} \iff \begin{cases} s=-t \\ t(1-y)=\frac{1}{2} \\ t(y-x)=0 \end{cases}$$

が成り立つ. 第2式より $t \neq 0$ であるから, $\textcircled{1}$ を満たす実数 s, t が存在する条件は

$$x = y$$

である.

よって, $(*)$ であるための x, y に関する必要十分条件は

$$x \neq y$$

$\dots\dots$ (答)

である.