点 O を原点とする座標空間に 4 点 A$(2,\ 7,\ -1)$，B$(3,\ 6,\ 0)$，C$(-8,\ 10,\ -3)$，D$(-9,\ 8,\ -4)$ がある．A，B を通る直線を ℓ_1 とし，C，D を通る直線を ℓ_2 とする．

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$$
であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boxed{\text{オ}}$ である．

(2) 花子さんと太郎さんは，点 P が ℓ_1 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となる P の位置について考えている．

P が ℓ_1 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 s があり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{カ}}$ が成り立つ．

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となる s の値を求めれば P の位置が求まる．このことについて，花子さんと太郎さんが話をしている．

花子： $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ が最小となる s の値を求めればよいね．
太郎： $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるときの直線 OP と ℓ_1 の関係に着目してもよさそうだよ．

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \boxed{\text{キ}}s^2 - \boxed{\text{クケ}}s + \boxed{\text{コサ}}$ である．

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき，直線 OP と ℓ_1 の関係に着目すると $\boxed{\text{シ}}$ が成り立つことがわかる．

花子さんの考え方でも，太郎さんの考え方でも，$s = \boxed{\text{ス}}$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となることがわかる．

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	① $s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
② $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	③ $(1-2s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
④ $(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} > 0$	① $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$
② $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} < 0$	③ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$
④ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$	⑤ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$
⑥ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$	

(3) 点 P が ℓ_1 上を動き，点 Q が ℓ_2 上を動くとする．このとき，線分 PQ の長さが最小になる P の座標は $\left(\boxed{\text{セソ}},\ \boxed{\text{タチ}},\ \boxed{\text{ツテ}}\right)$，Q の座標は $\left(\boxed{\text{トナ}},\ \boxed{\text{ニヌ}},\ \boxed{\text{ネノ}}\right)$ である．

(24 共通テスト 本試験 IIB 5)

【答】

ア	イウ	エ	オ	カ	キ	クケ	コサ	シ	ス	セソ	タチ	ツテ	トナ
1	−1	1	0	2	3	12	54	1	2	−3	12	−6	−7

ニヌ	ネノ
12	-2

【解答】

$$\mathrm{A}(2,\ 7,\ -1),\ \mathrm{B}(3,\ 6,\ 0),\ \mathrm{C}(-8,\ 10,\ -3),\ \mathrm{D}(-9,\ 8,\ -4)$$

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 6,\ 0)-(2,\ 7,\ -1)=\mathbf{(1,\ -1,\ 1)} \quad \cdots\cdots(答)$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-9,\ 8,\ -4)-(-8,\ 10,\ -3)=(-1,\ -2,\ -1)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,\ -1,\ 1)\cdot(-1,\ -2,\ -1)=-1+2-1=\mathbf{0} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 点 P は ℓ_1 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 s があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{s}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (2) \quad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\&=s^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=(1+1+1)s^2+2(2-7-1)s+(4+49+1)\\&=\mathbf{3}s^2-\mathbf{12}s+\mathbf{54} \quad \cdots\cdots(答)\\&=3(s-2)^2+42\end{aligned}$$

である．

また，直線 OP と ℓ_1 の関係に着目すると，直線 OP と ℓ_1 が垂直のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるから

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\mathbf{0} \quad (1) \quad \cdots\cdots(答)$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$-6+3s=0$$

であり，花子さんの考え方でも，太郎さんの考え方でも

$$s=\mathbf{2} \quad \cdots\cdots(答)$$

のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となることがわかる．

(3) 点 P は ℓ_1 上にあるので，実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(2,\ 7,\ -1)+s(1,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

と表すことができ，点 Q は ℓ_2 上にあるので，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=(-8,\ 10,\ -3)+t(-1,\ -2,\ -1)\end{aligned}$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(-10,\ 3,\ -2)+t(-1,\ -2,\ -1)-s(1,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=(100+9+4)+t^2(1+4+1)+s^2(1+1+1)\\&\qquad+2t(10-6+2)-2ts(-1+2-1)-2s(-10-3-2)\\&=113+6t^2+3s^2+12t+30s\\&=3(s+5)^2+6(t+1)^2+32\end{aligned}$$

であり，$s=-5$ かつ $t=-1$ のとき線分 PQ の長さは最小になる．このとき

P の座標 $\mathbf{(-3,\ 12,\ -6)}$，　Q の座標 $\mathbf{(-7,\ 12,\ -2)}$　　……（答）

である．

- 線分 PQ の長さが最小になるのは

  $\mathrm{PQ} \perp \ell_1$ かつ $\mathrm{PQ} \perp \ell_2$

  すなわち

  $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$

  のときである．

$$\begin{cases} \{(-10,\ 3,\ -2)+t(-1,\ -2,\ -1)-s(1,\ -1,\ 1)\}\cdot(1,\ -1,\ 1)=0 \\ \{(-10,\ 3,\ -2)+t(-1,\ -2,\ -1)-s(1,\ -1,\ 1)\}\cdot(-1,\ -2,\ -1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-10-3-2)+t(-1+2-1)-s(1+1+1)=0 \\ (10-6+2)+t(1+4+1)-s(-1+2-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15-3s=0 \\ 6+6t=0 \end{cases}$$

$\therefore\quad s=-5,\ t=-1$

よって，P の座標 $(-3,\ 12,\ -6)$，　Q の座標 $(-7,\ 12,\ -2)$ を得る．