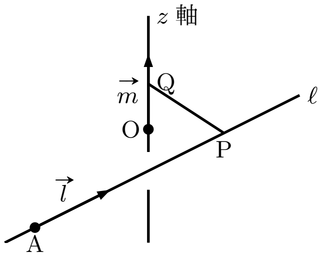
座標空間内の直線 ℓ と z 軸はねじれの位置にあるとする．ℓ と z 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

(24 大阪大 文系 2)

【答】 略

【解答】



座標空間における原点を O とおく．ℓ 上の 1 点を A，方向ベクトルを $\vec{\ell}$ $(\neq \vec{0})$ とおくと，ℓ 上の点 P は実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{\ell}$$

と表すことができ，z 軸の方向ベクトルを $\vec{m}$ $(\neq \vec{0})$ とおくと，z 軸上の点 Q は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\vec{m}$$

と表すことができる．

2 直線 ℓ, z 軸 はねじれの位置にあるから，ℓ, z 軸 は

共有点をもたず，かつ平行でない．

ℓ, z 軸 は共有点をもたないから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq \vec{0}$ であり，つねに直線 PQ が存在する．ℓ と z 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示すには

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{\ell} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$$

を満たす P，Q がただ 1 組存在することを示せばよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = t\vec{m} - s\vec{\ell} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから

$$\begin{cases} (s\vec{\ell} - t\vec{m}) \cdot \vec{\ell} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{\ell} \\ (s\vec{\ell} - t\vec{m}) \cdot \vec{m} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{m} \end{cases}$$

を満たす s, t がただ一組存在することを示せばよい．

$$\begin{cases} |\vec{\ell}|^2 s - (\vec{\ell} \cdot \vec{m})t = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{\ell} & \cdots\cdots ① \\ (\vec{\ell} \cdot \vec{m})s - |\vec{m}|^2 t = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{m} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① $\times |\vec{m}|^2 -$ ② $\times (\vec{\ell} \cdot \vec{m})$ より

$$\left\{|\vec{\ell}|^2|\vec{m}|^2 - (\vec{\ell} \cdot \vec{m})^2\right\} s = (\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{\ell})|\vec{m}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{m}) \times (\vec{\ell} \cdot \vec{m}) \qquad \cdots\cdots ③$$

① $\times (\vec{\ell} \cdot \vec{m}) -$ ② $\times |\vec{\ell}|^2$ より

$$\left\{|\vec{\ell}|^2|\vec{m}|^2 - (\vec{\ell} \cdot \vec{m})^2\right\} t = (\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{\ell}) \times (\vec{\ell} \cdot \vec{m}) - (\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{m})|\vec{\ell}|^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

ℓ, m は平行でないから，$\vec{\ell}$, $\vec{m}$ のなす角を θ とおくと，$\theta \neq 0$, π であり

$$|\vec{\ell}|^2|\vec{m}|^2 - (\vec{\ell} \cdot \vec{m})^2 = |\vec{\ell}|^2|\vec{m}|^2(1 - \cos^2\theta) \neq 0$$

である．したがって，s, t は

$$s = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{\ell})|\vec{m}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{m}) \times (\vec{\ell} \cdot \vec{m})}{|\vec{\ell}|^2|\vec{m}|^2 - (\vec{\ell} \cdot \vec{m})^2}$$

$$t = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{\ell}) \times (\vec{\ell} \cdot \vec{m}) - (\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \vec{m})|\vec{\ell}|^2}{|\vec{\ell}|^2|\vec{m}|^2 - (\vec{\ell} \cdot \vec{m})^2}$$

としてただ一組の解をもつ．すなわち，ℓ と z 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することが示された．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

- 座標空間における原点を O とおく．ℓ 上の 1 点を A，方向ベクトルを $\vec{\ell}\ (\neq \vec{0})$ とおくと，ℓ 上の点 P は実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{\ell}$$

と表すことができ，z 軸上の方向ベクトルを $\vec{m}\ (\neq \vec{0})$ とおくと，m 上の点 Q は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\vec{m}$$

と表すことができる．

2 直線 ℓ, z 軸 はねじれの位置にあるから，ℓ, m は

共有点をもたず，かつ平行でない．

$\vec{\ell}$, $\vec{m}$ は $\vec{0}$ でなく，平行でないから，$\vec{\ell}$, $\vec{m}$ に垂直な $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ が存在する．$\vec{\ell}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ は 1 次独立であるから，実数 p, q, r を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = p\vec{\ell} + q\vec{m} + r\vec{n}$$

と表すことができる．これは

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - p\vec{\ell} - q\vec{m} = r\vec{n} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

と変形することができる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - p\vec{\ell}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\vec{m}$$

となる点 P，Q はそれぞれ直線 ℓ, z 軸 上の点である．このとき，㋐は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = r\vec{n} \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{QP}} = r\vec{n}$$

である．ℓ, z 軸 は共有点をもたないから，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} \neq \vec{0}$ であり，$\vec{n}$ と平行である．すなわち，直線 PQ は ℓ と z 軸の両方に直交する直線である (存在すること)．

次に，ℓ と z 軸の両方に直交する直線 PQ はただ 1 つであることを示す．

ℓ 上に P，P$'$，z 軸上に Q，Q$'$ があり，PQ，P$'$Q$'$ がともに ℓ と z 軸の両方に直交するとする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} + \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} + \overrightarrow{\mathrm{Q'Q}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \vec{0}$$

が成り立つ．実数 a, b, c を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = a\vec{\ell},\ \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} = b\vec{n},\ \overrightarrow{\mathrm{Q'Q}} = c\vec{m}$$

と表すことができ

$$a\vec{\ell} + b\vec{n} + c\vec{m} + r\vec{n} = \vec{0}$$
$$\therefore \quad a\vec{\ell} + c\vec{m} + (b+r)\vec{n} = \vec{0}$$

となる．$\vec{\ell}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{cases} a = c = 0 \\ b + r = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{Q'Q}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} \end{cases}$$

であり，P と P$'$，Q と Q$'$ は一致し，直線 PQ と直線 P$'$Q$'$ は一致する (一意性)．

以上より，ℓ と z 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在する．